

SÉRIE A.
N° 2290
N° D'ORDRE
3161

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Paul GERMAIN

1^{ère} THÈSE. - LA THÉORIE GÉNÉRALE DES MOUVEMENTS CONIQUES ET SES
APPLICATIONS A L'AÉRODYNAMIQUE SUPERSONIQUE

2^{ème} THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 Juin 1948 devant LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. VILLAT : *Président*

R. GARNIER }

J. PERES }

Examineurs

O.N.E.R.A.
3, Rue Léon Bonnat
PARIS XVIème

1949

SÉRIE A,
N° 2290
N° D'ORDRE
3161



THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Paul GERMAIN

1^{ère} THÈSE. - LA THÉORIE GÉNÉRALE DES MOUVEMENTS CONIQUES ET SES
APPLICATIONS A L'AÉRODYNAMIQUE SUPERSONIQUE

2^{ème} THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 Juin 1948 devant LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. VILLAT : *Président*

R. GARNIER }
J. PERES } *Examineurs*

O.N.E.R.A.
3, Rue Léon Bonnat
PARIS XVIème

1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM. T	Botanique.	GRASSE T	Evolution des êtres organisés.
G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	PREVOST	Chimie organique.
C. MAUGUIN T	Minéralogie.	BOULIGAND T	Application de l'analyse à la Géométrie.
A. DENJOY T	Théorie des Fonctions, et Topologie.	CHAUDRON T	Chimie.
L. LUTAUD T	Géographie physique et géologie dynamique.	WYART	Minéralogie.
E. DARMOIS T	Enseignement de Physique	TEISSIER T	Zoologie.
Robert LEVY T	Physiologie comparée.	MANGENOT T	Biologie végétale.
Henri VILLAT T	Mécanique des fluides et applications.	P. AUGER T	Physique quantique et relativité.
Ch. JACOB T	Géologie.	MONNIER	Physiologie générale.
P. PASCAL T	Chimie générale.	PIVETEAU	Géologie.
M. FRECHET T	Calcul des probabilités et Physique mathématique	ROCARD T	Physique.
Mme RAMART-LUCAS T	Chimie organique	H. CARTAN	Calcul différentiel.
FOCH T	Mécanique physique et expérimentale.	SCHAEFFER T	Physiologie des fonctions.
PAUTHENIER T	Electrotechnique générale.	LAFFITTE	Chimie (P.C.B.).
De BROGLIE T	Théories physiques.	FAVARD	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
JOB T	Chimie générale.	COULOMB T	Physique du globe.
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparées.	Mlle COUSIN	Biologie animale (P.C.B.).
VILLEY T	Mécanique appliquée	CHRETIEN	Chimie (P.C.B.).
COMBES T	Physiologie végétale.	DRACH	Zoologie.
GARNIER T	Géométrie supérieure.	KASTLER	Physique.
PERES T	Mécanique rationnelle.	CHATELET T	Arithmétique et théorie des nombres.
HACKSPILL T	Chimie minérale.	EHRUSSI T	Génétique.
LAUGIER T	Physiologie générale	WURMSER T	Biologie physico-chimique.
TOUSSAINT T	Technique Aéronautique.	BAUER T	Chimie-Physique.
M. CURIE T	Physique (P.C.B.).	RIVIERE	Géologie (P.C.B.).
G. RIBAUD T	Hautes températures.	GANTHERET	Biologie Végétale (P.C.B.).
CHAZY T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LUCAS	Physique.
H. GAULT T	Chimie appliquée.	Max MORAND	Physique.
CROZE T	Physique théorique et Physique céleste.	ARNULF	Optique appliquée.
DUPONT T	Théories chimiques.	A. THOMAS	Evolution des êtres organisés.
VALIRON T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	SOLEILLET	Physique.
BARRABE T	Géologie structurale et géologie appliquée.	FORTIER	Mécanique expérimentale des fluides.
VAVON T	Analyse et mesures chimiques.	DANJON T	Astronomie.
G. DARMOIS T	Mathématiques générales.	FROMAGEOT	Chimie biologique.
Jacques BOURCART	Géographie physique et Géologie dynamique.	LAFORTE	Physique générale et Radioactivité.
AUBEL T	Chimie biologique.	JANET	Mathématiques générales.
Mme JOLIOT-CURIE T	Physique générale et Radioactivité.	PETIT T	Biologie maritime.
PLANTEFOL T	Botanique.	QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
CABANNES T	Recherches physiques.	GALLIEN	Biologie animale (P.C.B.).
		EICHORN	Biologie végétale (P.C.B.).
		De CUGNAC	Biologie végétale (P.C.B.).
		LAVAL	Physique (P.C.B.).
		Mlle CAUCHOIS	Chimie-Physique.
		THELLIER	Physique du Globe.
		AUDUBERT	Electrochimie.
		L'HERITIER	Génétique.

Secrétaire Ch. MONIER



AVERTISSEMENT

Ce travail porte sur une méthode d'étude de l'équation des ondes cylindriques particulièrement indiquée pour la résolution de certains problèmes d'aérodynamique. Un des aspects les plus notables de cette méthode, c'est qu'elle ramène des problèmes portants sur une équation hyperbolique, à des problèmes portants sur des fonctions harmoniques. Nous nous sommes attachés ici à en poser les principes fondamentaux, à en développer l'étude jusqu'au calcul des pressions sur les obstacles envisagés, et à montrer comment par un procédé de superposition intégrale, le champ initial des "mouvements coniques" se trouvait considérablement élargi.

Un tel travail comporte certains écueils. L'existence des mouvements coniques n'a été connue en France qu'en 1946. A l'étranger, depuis longtemps, cette question donnait lieu à de nombreux travaux qui n'ont jamais fait l'objet de publications ou qui ont été publiés avec un certain retard. Ainsi doit-on préciser que certains des résultats obtenus ici, originaux en France quand ils ont été trouvés, ne l'étaient sans doute pas à l'étranger. Toutefois il me paraît possible de préciser un certain nombre de points traités dans ce travail qui avec le recul du temps, apparaissent comme nouveaux : ce qui concerne les mouvements homogènes, l'étude générale des mouvements coniques infiniment peu ouverts, les méthodes numériques ou analogiques pour l'étude des mouvements aplatis sur un plan, et un certain nombre de résultats du Chapitre 4. De plus, même pour des résultats déjà connus à l'étranger que nous avons retrouvés indépendamment, les méthodes employées ne sont pas toujours identiques.

Une autre particularité doit être notée. Ces questions faisant partout actuellement l'objet de nombreuses recherches, les progrès réalisés sont très rapides. Ce travail rédigé au début de 1948, risque d'apparaître par certains aspects en fin 1949, comme un peu dépassé. Pour pallier cet inconvénient nous avons, dans une brève annexe placée à la fin de l'ouvrage, signalé les progrès réalisés dans ces questions depuis un an. Cette annexe est suivie d'une bibliographie complémentaire où se trouvent indiqués les travaux récents ou plus anciens dont nous n'avions pas eu connaissance, se rapportant à notre sujet.

Je n'ai pu mener à bien ce travail que grâce aux avis et à l'appui de mon maître M. J. PERES, et je tiens à lui exprimer ici ma très respectueuse reconnaissance.

Il me faudrait également citer tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à ma formation intellectuelle et à qui je dois tant : mes maîtres de Mathématiques spéciales et de l'Ecole Normale, M. BOULIGAND, qui dirigea mes premiers travaux, M. VILLAT, promoteur des études de Mécanique des fluides en France et dont le lumineux enseignement m'a été très profitable.

Je tiens également à remercier la Direction de l'O.N.E.R.A. qui m'a facilité la tâche, et spécialement M. GIRERD, Directeur des Recherches Aérodynamiques.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547114_0011

I.- GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS CONIQUES

I.1.- Equations des mouvements supersoniques linéarisés:-

1.1.1.- EQUATION GENERALE DU POTENTIEL DES VITESSES.-

Envisageons le mouvement permanent irrotationnel d'un fluide parfait compressible, pour lequel la pression p et la densité ρ sont fonctions l'une de l'autre. L'espace dans lequel a lieu le mouvement sera repéré par trois axes Ox_1, Ox_2, Ox_3 trirectangulaires, les coordonnées d'une molécule fluide seront x_1, x_2, x_3 , les projections sur Ox_1 de la vitesse $\vec{V}$ et de l'accélération $\vec{A}$ d'une molécule seront respectivement désignées par u_1 et a_1 .

Les équations fondamentales permettant la détermination du mouvement sont les équations d'Euler :

$$\vec{A} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p;$$

ou

$$(I.1) \quad a_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1},$$

l'équation de continuité (1) :

$$(I.2) \quad \text{div } \rho \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) = 0,$$

et l'équation de compressibilité :

$$p = f(\rho).$$

Si l'on remarque que :

$$(I.3) \quad a_1 = u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k},$$

et si l'on introduit la célérité du son (2) :

(1) Nous employons la convention classique de l'indice muet : $\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)$ doit se lire : $\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3)$.

(2) La célérité du son introduite ici par le symbole $\frac{dp}{d\rho}$ a une signification physique bien connue; c'est la vitesse de propagation des petits ébranlements. Cette signification permet souvent une interprétation intuitive de certains résultats que nous rencontrerons par la suite (Voir N° 1.1.4.).

(I.4)

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

L'équation (I.1) prend la forme :

$$(I.5) \quad u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Introduisons le potentiel des vitesses $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ défini à une constante près par :

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi, \quad u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

ce qui est légitime puisque nous supposons le mouvement irrotationnel. Si nous faisons la combinaison :

$$u_i u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k},$$

on voit, en tenant compte de (I.5) et de (I.2) que :

$$(I.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}.$$

Cette équation est l'équation générale du potentiel des vitesses. On peut montrer en outre que c est fonction du module de la vitesse; on obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, mais non complètement linéaire.

Le caractère non linéaire de l'équation du potentiel des vitesses rend l'étude rigoureuse des mouvements compressibles assez difficile, tout au moins dans le cas tridimensionnel.

Afin de pouvoir étudier, au moins approximativement, le comportement des ailes, des fuselages ou autres éléments des structures aéronautiques, aux vitesses mettant en cause la compressibilité, on a été amené à introduire des hypothèses simplificatrices, permettant la "linéarisation" de l'équation du potentiel des vitesses.

1.1.2.- LES HYPOTHESES DE LINEARISATION ET LEURS CONSEQUENCES.-

Pour le calcul aérodynamique, on peut considérer que le corps autour duquel se fait l'écoulement a une position fixe dans l'espace et que le fluide à l'infini amont est animé d'une vitesse $\vec{U}$, $\vec{U}$ étant un vecteur constant dont le module sera pris pour unité de vitesse. Nous supposons toujours que l'axe Ox_1 a la même orientation que $\vec{U}$; les hypothèses de linéarisation reviennent à supposer qu'en tout point du fluide la vitesse est sensiblement équipollente à $\vec{U}$.

D'une façon plus précise posons :

$$u_1 = 1 + u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w;$$

u, v, w sont, par définition, les composantes de la "vitesse de perturbation".

1) u, v, w sont des quantités très petites par rapport à l'unité; si on considère ces quantités comme étant des infiniment petits du premier ordre au moins (1), on s'autorise à négliger, dans les équations, tous les infiniment petits du second ordre tels que u^2, v^2, uv , etc...

2) Toutes les dérivées partielles de u, v, w par rapport aux coordonnées sont également des infiniment petits du premier ordre au moins, si bien qu'on s'autorise à négliger les termes tels que $u \frac{\partial u}{\partial x_1}, \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2$ etc...

On peut déduire quelques conséquences immédiates de ces hypothèses :

a) En tout point du champ, l'angle du vecteur vitesse avec l'axe Ox_1 est un infiniment petit du premier ordre au moins. Il en résulte une condition imposée aux corps autour desquels on veut étudier l'écoulement; *en chaque point le plan tangent doit faire un angle petit avec la direction de l'écoulement non perturbé*, (on appelle ainsi le mouvement uniforme, défini par la vitesse $\vec{U}$).

Si on désigne par q le module de la vitesse, on a, compte tenu des hypothèses faites :

$$q^2 = (1 + u)^2 + v^2 + w^2 = 1 + 2u ,$$

d'où $q = 1 + u$.

b) La pression p et la densité ρ ne diffèrent des valeurs p_1 et ρ_1 que prennent ces grandeurs à l'infini amont que d'un infiniment petit du premier ordre; l'équation (I.5) s'écrit en effet :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = - \frac{c_1^2}{\rho_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} ,$$

c_1 désignant la célérité du son à l'infini amont; donc :

$$(I.7) \quad u = - \frac{c_1^2}{\rho_1} (\rho - \rho_1) .$$

D'autre part, d'après (I.4) :

$$p - p_1 = c_1^2 (\rho - \rho_1) = - \rho_1 u .$$

Si on définit le coefficient de pression C_p par :

$$C_p = \frac{p - p_1}{\rho_1/2 |\vec{U}|^2} ,$$

on a :

$$(I.8) \quad C_p = - 2 u .$$

(1) Ceci signifie que u, v, w peuvent très bien ne pas être des infiniment petits du même ordre; dans ce cas, on prend comme infiniment petit principal, la composante de la vitesse de perturbation qui a l'ordre le moins élevé.

c). Enfin, si l'on examine ce que devient, dans ces hypothèses, l'équation du potentiel des vitesses (I.6), on voit qu'elle se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \right).$$

Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ le "potentiel de perturbation", c'est-à-dire le potentiel dont le gradient est identique au vecteur vitesse de perturbation : $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(I.9) \quad \frac{1 - c_1^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2},$$

équation complètement linéaire.

On appelle nombre de Mach de l'écoulement la constante sans dimension $M = \frac{|\vec{U}|}{c_1}$ qui, étant donné le choix de l'unité de vitesse, s'écrit ici $M = 1/c_1$.

Posons : $\varepsilon (M^2 - 1) = \beta^2$,

ε étant égal à +1 ou -1 suivant que M est supérieur ou inférieur à 1.

1) Si $M < 1$, (I.9) s'écrit :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0,$$

équation que l'on ramène facilement à l'équation de Laplace.

Cette équation s'applique aux mouvements dits "subsoniques", car la vitesse de l'écoulement non perturbé est inférieure à la célérité du son à l'infini amont. Ces mouvements ne seront pas étudiés dans la suite du travail ⁽¹⁾.

2) Si $M > 1$, (I.9) s'écrit alors :

$$(I.10) \quad \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

Cette équation s'applique aux mouvements "supersoniques"; elle s'identifie, si l'on interprète x_1 comme représentant le temps t , avec l'équation des ondes cylindriques, bien connue en physique mathématique. C'est l'étude de cette équation qui fera l'objet de notre travail.

REMARQUES.-

1) Il y a lieu de remarquer que nous n'avons pas eu besoin, pour écrire les équations précédentes, de préciser la forme de l'équation d'état du fluide. En particulier, les formules écrites ne font pas intervenir la valeur de l'exposant γ de la relation adiabatique $p = k\rho^\gamma$, qui est la forme usuelle que prend l'équation de compressibilité.

(1) L'étude des mouvements subsoniques linéaires a fait l'objet de nombreux travaux. Voir par exemple à ce sujet les références 1 et 2 de la bibliographie.

2) L'analyse précédente met en évidence le caractère très différent des mouvements subsoniques qui conduisent à une équation elliptique, et des mouvements supersoniques qui dépendent d'une équation hyperbolique.

3) Quand nous avons écrit l'équation (I.9), nous avons supposé implicitement que $M^2 - 1$ n'était pas infiniment petit, c'est-à-dire que le mouvement n'était pas "transsonique", selon l'expression de Von Karman ⁽¹⁾. Il est donc impossible de faire tendre M vers 1 dans les résultats que nous obtiendrons, avec l'espoir d'obtenir des renseignements sur le cas transsonique ⁽²⁾.

4) Il peut arriver, conformément à la note (1) de la page 3, que u soit un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Dans ce cas, il y a lieu de reprendre l'analyse faite à l'alinéa (b) du N° 1.1.2, ce qui conduit à une formule donnant le C_p , plus adéquate que la formule (I.8) :

$$(I.11) \quad C_p = - 2u - (v^2 + w^2).$$

1.1.3.- VALIDITE DES HYPOTHESES DE LINEARISATION.-

Toute hypothèse simplificatrice conduit nécessairement à des résultats différents de ceux qu'on obtiendrait en toute rigueur. Néanmoins, certaines études numériques sur des profils (écoulements bidimensionnels) où furent appliquées simultanément la méthode rigoureuse et la méthode de linéarisation ont montré que la méthode approchée fournissait une très bonne approximation pour le calcul des efforts. D'ailleurs il est bien connu que l'équation classique de Prandtl pour l'étude des ailes d'envergure finie en fluide incompressible fournit des résultats très acceptables; or, l'équation de Prandtl résulte d'une linéarisation du problème rigoureux.

Il arrive souvent, nous aurons plusieurs fois l'occasion de le signaler, que la solution trouvée pour u , v , w ne satisfasse pas aux hypothèses du N° 1.1.2. en certaines régions (par exemple aux environs d'un bord d'attaque); éventuellement certaines de ces grandeurs pourraient même devenir infinies.

En toute rigueur, une telle solution ne devrait pas être retenue. Toutefois, si les régions où les hypothèses de linéarisation ne sont pas satisfaites sont "assez réduites", il y a lieu de penser que les expressions trouvées pour les efforts (obtenus par intégration des pressions) resteront encore valables. Il y a là une justification, à posteriori, de la méthode de linéarisation souvent utilisée dans de nombreux problèmes aérodynamiques ⁽³⁾. Nous n'écarterons donc pas systématiquement les solutions trouvées qui ne satisferont pas totalement aux hypothèses posées.

(1) L'étude des mouvements transsoniques, avec des hypothèses simplificatrices, analogues à celles qui ont été faites, demande une analyse plus serrée des phénomènes. Elle conduit à une équation, non linéaire, signalée la première fois par Oswatitsch et Wieghart (ref.3). On en déduit, très facilement, d'intéressantes relations de similitude pour les écoulements transsoniques (ref.4). On peut trouver également, très simplement, ces relations, en utilisant le plan de l'hodographe.

(2) D'une façon générale, suivant les valeurs de M , on peut être amené à négliger certains termes dans les formules finales trouvées pour le coefficient de pression C_p . Ceci demande une évaluation, dans chaque cas particulier, de l'ordre de grandeur des termes intervenant dans les formules quand M varie. Nous ne ferons jamais, dans ce travail, une telle discussion et nous nous limiterons, volontairement, aux formules générales. On trouvera un exemple intéressant d'une telle discussion dans le récent mémoire de E. Laitone (ref.5).

(voir renvoi (3) page 6)

1.1.4.- CONDITIONS AUX LIMITES. THEOREME D'EXISTENCE.-

Physiquement, la définition de la célérité du son conduit à la règle que l'on a appelé "règle des signaux interdits" (voir la note (2) du paragraphe 1.1.1. et que l'on peut énoncer :

Une perturbation dans un mouvement supersonique uniforme, de vitesse U , produite en un point P , n'a d'action qu'à l'intérieur d'un demi-cône de révolution d'axe U et de demi-angle au sommet $\alpha = \text{Arc sin } (1/M)$; ($\beta = \cot \alpha$) α s'appelle l'angle de Mach, le demi-cône en question "arrière-cône de Mach en P ".

Corrélativement, on peut énoncer que l'état du fluide en un point M (pression, vitesse, etc...) ne dépend que de la nature des perturbations produites dans l'écoulement non perturbé en des points situés à l'intérieur de "l'avant-cône de Mach en M ", l'avant-cône de Mach en un point étant évidemment le symétrique de l'arrière cône de Mach par rapport à son sommet.

Du point de vue mathématique, si on veut justifier cette règle, il faut partir des formules résolvant le problème de Cauchy, et tenir compte des conditions aux limites particulières au problème. Le long de l'obstacle, il faut écrire que la vitesse est tangente à l'obstacle ce qui donne la valeur de $d\varphi/dn$. De plus, à l'infini amont ($x_1 = -\infty$), les dérivées premières de φ doivent être nulles, φ n'étant déterminé, du point de vue aérodynamique, qu'à une constante près pourra lui-même être supposé nul.

Les surfaces caractéristiques de l'équation (I.10) sont les cônes de Mach. Si l'un des cônes de Mach du point P découpe sur une surface (Σ) une région (R), l'étude classique du problème de Cauchy ⁽⁴⁾ montre que la valeur de φ en P est une fonctionnelle linéaire continue des valeurs de φ et de $d\varphi/dn$ sur R .

Considérons alors un point M d'un écoulement supersonique tel que son avant-cône ne coupe pas l'obstacle. Prenons comme surface Σ , un plan $x_1 = -A$, A étant arbitrairement grand. Sur Σ , φ et $d\varphi/dn$, qui sont des fonctions continues, seront arbitrairement petits. Par suite, la valeur de φ , en M , est nulle. Ainsi se trouve justifié un premier aspect de la règle des "signaux interdits".

Supposons que l'avant-cône de M découpe sur l'obstacle une région $r(M)$; sur $r(M)$, $d\varphi/dn$ est donné par les conditions aux limites; $\varphi(M)$ est donc une fonctionnelle linéaire des valeurs de φ sur $r(M)$.

On voit alors que, si on fait tendre M vers un point M_0 de l'obstacle, on obtiendra une équation fonctionnelle permettant la détermination de φ sur l'obstacle, tout au moins dans les cas où l'existence et l'unicité de la solution seront assurées ⁽⁵⁾. Par conséquent, $\varphi(M)$ ne dépend que des valeurs de $d\varphi/dn$ dans la région $r(M)$; ceci justifie la conséquence fondamentale de la règle des "signaux interdits". ⁽⁶⁾

...

(3) Par exemple, dans l'étude des mouvements vibratoires d'amplitude infiniment petite autour de profils minces.

(4) Pour le problème de Cauchy, relatif à l'équation des ondes cylindriques, voir, par exemple, les références 6 et 7.

(5) Une telle méthode a été utilisée par G. Temple et H.A. Jahn, dans l'étude d'une équation aux dérivées partielles à deux variables (ref.8).

(6) On trouvera une étude plus précise de cette question, annexe 1, à la fin de ce travail.

1.1.5.- METHODES GENERALES POUR L'ETUDE DES ECOULEMENTS SUPERSONIQUES LINEARISES.-

Dans un article récent ⁽¹⁾ ayant pour objet l'étude des écoulements supersoniques linéaires, Von Karman indique qu'il existe deux grands procédés généraux pour étudier ces écoulements, l'un appelé "la méthode des sources", l'autre "l'analogie acoustique".

La première, déjà ancienne, est d'un emploi théorique assez simple. Elle consiste à placer, sur la surface extérieure de l'obstacle, une répartition continue de singularités, appelées sources, dont la superposition donne, en chaque point de l'espace, le potentiel cherché, l'intensité locale des sources étant, en général, relativement facile à déterminer à l'aide des conditions aux limites. La seconde méthode utilise une solution fondamentale de l'équation (I.10), dont la composition permet d'obtenir le potentiel cherché; l'intérêt de ce procédé est de permettre l'utilisation des intégrales de Fourier et de fournir ainsi, tout au moins dans certains cas particuliers, des expressions assez simples pour les efforts globaux.

Von Karman indique également, en fin d'article, un troisième procédé général, celui des mouvements coniques.

Nous nous proposons, dans ce travail, l'étude des mouvements coniques et le développement de ce troisième procédé qui utilise systématiquement la composition des "mouvements coniques" et, plus généralement, des mouvements que nous appellerons "les mouvements homogènes d'ordre n". Nous verrons que ce procédé permet de retrouver très facilement, et souvent à moins de frais, un grand nombre de résultats précédemment obtenus par d'autres méthodes, et de mener à bien l'étude de certains problèmes qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été résolus.

1.2.- Généralités sur les écoulements coniques.-

1.2.1.- HISTORIQUE ET DEFINITION.-

Les écoulements coniques ont été introduits par A. Busemann (ref.9), qui a donné les principales caractéristiques de ces mouvements et indiqué très rapidement dans quelles voies ils pouvaient être utilisés dans l'étude des mouvements supersoniques. Busemann donne, à titre d'exemple, quelques résultats, souvent sans démonstration. Plusieurs auteurs ont complété l'étude de Busemann : Stewart (ref.10) a étudié le cas de l'aile Δ portante sur laquelle nous reviendrons plus loin; L. Beschkin (ref.11) a fourni un certain nombre de résultats, mais, généralement, sans démonstration. Il nous a semblé intéressant de tenter un exposé d'ensemble de la question.

(1) Voir ref.4. On trouvera également un rapide exposé des méthodes dont il est question dans le texte, à la ref.2.

On appelle "écoulements coniques" d'une façon plus précise, "écoulements coniques infinitésimaux" ⁽¹⁾ les écoulements dans lesquels il existe un point O tel que, le long de toute demi-droite issue de O , le vecteur vitesse reste équipollent à lui-même.

Soit (π) un plan ne contenant pas O , normal au vecteur $\vec{U}$; supposons seulement que le vecteur vitesse en chaque point de (π) ne soit pas normal à (π) ; la projection sur (π) de ces vecteurs vitesses détermine un champ de vecteurs dont nous appellerons (γ) les lignes de force : les cônes (σ) de sommet O et de directrice (γ) sont des "cônes de courant" pour l'écoulement.

Plus généralement, soit (S) une surface de courant de l'écoulement, passant par O ; toute surface, déduite de (S) par homothétie de centre O et de rapport k , k étant un nombre positif arbitraire, est une surface de courant. (S) n'est pas nécessairement une surface conique de sommet O , mais la donnée de (S) comme obstacle ne permet pas de prévoir l'existence d'un tel écoulement. Il en est autrement si on donne un obstacle conique de sommet O ; l'appellation "mouvement conique" se trouve ainsi justifiée.

Réciproquement, considérons un cône de sommet O , situé tout entier dans la région $x_1 \geq 0$, et supposons qu'il existe un écoulement supersonique linéarisé autour de ce cône; cet écoulement est nécessairement un écoulement conique tel qu'il vient d'être défini; en effet, si $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$ désigne ce champ de vitesse, $\vec{V}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ (λ étant un nombre positif quelconque) est également un champ de vitesses répondant à toutes les conditions du problème; par suite, si on admet l'unicité de l'écoulement cherché $\vec{V}$ doit être constant le long de toute demi droite issue de O ⁽²⁾.

Signalons encore que, d'après (I.8) ou (I.11), les surfaces d'égale pression sont également des cônes de sommet O .

1.2.2. - EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES AUXQUELLES SATISFONT LES COMPOSANTES DE LA VITESSE. -

Par définition, les composantes de la vitesse d'un écoulement conique ne dépendent que de deux variables; d'autre part, comme fonctions de x_1, x_2, x_3 , elles sont naturellement solution de l'équation :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

Posons d'abord :

$$x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta,$$

l'équation prend alors la forme :

$$(I.12) \quad \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r},$$

(1) L'adjectif "infinitésimaux" rappelle que les écoulements ont été "linéarisés"; nous omettrons désormais ce qualificatif, car dans ce travail il ne peut y avoir de confusion.

(voir renvoi (2) page suivante...

Le second membre de (I.12) n'est autre chose, en effet, que le Laplacien de $f(x_1, x_2, x_3)$ dans le plan x_2, x_3 (x_1 étant considéré comme paramètre); naturellement, $f(x_1, r, \theta)$ est périodique en θ , la période étant égale à 2π .

Pour mettre en évidence le caractère conique de l'écoulement posons :

$$(I.13) \quad x_1 = \beta r \chi,$$

χ est une nouvelle variable; $\chi < 1$ caractérise l'extérieur du cône de Mach de sommet O, $\chi > 1$ caractérise l'intérieur de ce cône. Dans ces conditions, les composantes de la vitesse de perturbation ne sont fonctions que de χ et θ , f étant fonction de χ et θ seulement :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \theta} d\chi d\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial f}{\partial \chi} d^2\chi + \frac{\partial f}{\partial \theta} d^2\theta;$$

mais :

$$d\chi = \frac{1}{\beta r} (dx_1 - \beta \chi dr),$$

$$d^2\chi = \frac{1}{\beta r} (d^2x_1 - \beta \chi d^2r - 2 \frac{dr dx_1}{r} + 2\beta \frac{\chi}{r} dr^2);$$

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \frac{\partial f}{\partial r}$ sont les coefficients respectifs de $dx_1^2, dr^2, d\theta^2, d^2r$, dans l'expression de d^2f en fonction des variables x_1, r, θ .

Il s'en suit que l'équation (I.12) devient, dans ces conditions :

$$(I.14) \quad (\chi^2 - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} = 0.$$

On peut chercher à simplifier encore cette équation en remplaçant la variable χ par la variable ξ , χ et ξ étant liées par une relation $\chi = \chi(\xi)$, et en faisant un choix judicieux pour la fonction $\chi(\xi)$. La première opération donne :

$$(\chi^2 - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \chi'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \left[\chi \chi' - \frac{(\chi^2 - 1) \chi''}{\chi'} \right] = 0,$$

l'accentuation désignant des dérivées par rapport à ξ . Pour simplifier cette équation, on peut faire disparaître le terme en $\frac{\partial f}{\partial \xi}$. Ceci sera réalisé en posant :

1) Si $\chi > 1$,

$$(I.15) \quad \chi = \text{ch } \xi;$$

on obtient pour f l'équation de Laplace :

$$(I.16) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0.$$

(2) Il y a lieu de remarquer que ce raisonnement ne serait plus valable sans restriction dans le cas d'un écoulement supersonique réel autour d'un cône, car dans ce cas, le principe des "signaux interdits" n'est plus valable sous la forme stricte où nous l'avons énoncé. Il peut se produire, entre autres, en amont du cône, une onde de choc détachée derrière laquelle le mouvement n'est plus irrotationnel.

2) Si $\chi < 1$,

(I.17)

$$\chi = \cos \eta ;$$

dans ce cas, on obtient l'équation des ondes à deux variables:

(I.18)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Interprétation géométrique.—

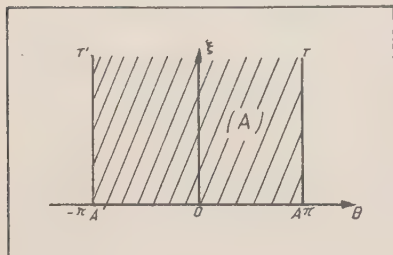


Fig. 1

$\chi > 1$ correspond à l'intérieur de l'arrière cône de Mach (Γ) du point O; chaque demi-droite, issue de O, intérieure à ce cône, a pour image un point θ, ξ . On supposera, par exemple, $-\pi < \theta \leq \pi$; $\xi = 0$ correspond au cône (Γ), $\xi = \infty$ correspond à l'axe du cône (ξ pourra toujours être supposé positif). L'image de l'intérieur de (Γ) se fait donc sur la région (A) du plan (θ, ξ) (fig. 1) limitée par les demi-droites AT, A'T' et par le segment AA'. La correspondance est biunivoque, en ce sens qu'à une demi-droite issue de O correspond un point et un seul (θ, ξ) dans la région délimitée, et réciproquement, à un point de cette région correspond une demi-droite, et une seule, issue de O, intérieure à (Γ).

Comme nous supposerons, en général, que le cône étudié est tout entier dans la région $x_1 \geq 0$, seule cette région présente un intérêt (φ étant alors identiquement nul pour $x_1 < 0$). Les demi-droites de cette région issues de O et extérieures à (Γ) correspondent à $0 < \chi < 1$ (fig. 2), c'est-à-dire, d'après (I.17), $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$; $\eta = 0$ correspond au cône (Γ), $\eta = \frac{\pi}{2}$ au

plan $x_1 = 0$; les demi-droites issues de O correspondent biunivoquement aux points de la région (A'), intérieure au rectangle AA' B'B dans le plan (θ, η) .

En résumé les composantes de la vitesse satisfont aux équations simples (I.16) et (I.18), la première étant relative à la région (A), la seconde à la région (A').

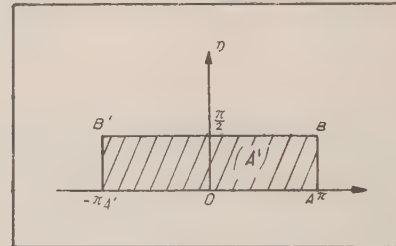


Fig. 2

1.2.3.— THEOREME FONDAMENTAL.—

L'équation (I.14), qui représente l'équation fondamentale de notre problème, est une équation du type mixte, elle est elliptique ou hyperbolique suivant que χ est supérieur ou inférieur à 1. Pour étudier plus simplement cette équation, nous avons été conduits à séparer le domaine des variables en deux parties et à en faire la représentation sur deux plans différents. Comment se fera alors le raccord des solutions obtenues pour f dans l'un et l'autre plan; c'est la question qu'élucidera complètement le théorème suivant, qui sera fondamental dans la suite de notre étude;

THEOREME : il y a "raccord" sur $\chi = 1$ pour toutes les dérivées de f , (définies dans l'une ou l'autre région (A) ou (A')), pourvu qu'il y ait "raccord" pour la fonction elle-même.

En effet, soient deux fonctions $f_1(\theta, \xi)$, $f_2(\theta, \eta)$, la première satisfaisant à l'équation (I.18) dans la région (A), la seconde à l'équation (I.18) dans la région (A'), prenant toutes les deux les mêmes valeurs $\varphi(\theta)$ sur les segments respectifs ($\xi = 0, -\pi < \theta < \pi$) ($\eta = 0, -\pi < \theta < \pi$). Soit θ_0 l'abscisse d'un point de AA'. Si $\frac{\partial^n f_1}{\partial \theta^n}(\theta_0, 0)$ existe, $\frac{\partial^n f_1}{\partial \theta^n}(\theta_0, 0) = \frac{d^n \varphi}{d\theta^n}$, par suite

$\frac{\partial^n f_2}{\partial \theta^n}(\theta_0, 0)$ existe et :

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial \theta^n}(\theta_0, 0) = \frac{\partial^n f_2}{\partial \theta^n}(\theta_0, 0).$$

Passons maintenant à l'étude des dérivées d'ordre n de la forme $\frac{\partial^n f}{\partial \chi \partial \theta^{n-1}}$: l'équation (I.14) montre d'abord que :

$$\frac{\partial f}{\partial \chi}(\theta, 1) = -\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\theta, 1),$$

ce qui prouve que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à χ , ont la même valeur sur (Γ) , qu'elles soient calculées à partir de f_1 ou à partir de f_2 . Le raisonnement se poursuit sans difficulté par récurrence. En dérivant (I.14) n fois par rapport à χ et en faisant $\chi = 1$, on obtient :

$$(2n+1) \frac{\partial^{n+1} f}{\partial \chi^{n+1}} + n^2 \frac{\partial^n f}{\partial \chi^n} + \frac{\partial^{n+2} f}{\partial \theta^2 \partial \chi^n} = 0,$$

ce qui montre finalement que les valeurs de $\frac{\partial^{n+p} f}{\partial \theta^p \partial \chi^n}$ peuvent s'exprimer uniquement en fonction des dérivées de $\varphi(\theta)$ par rapport à θ et que, par conséquent, elles ont la même valeur quand on les calcule à partir de f_1 ou à partir de f_2 .

On peut dire, en résumé, que pour établir le "raccord" entre deux solutions définies dans (A) et (A'), il suffit que ces solutions prennent la même valeur sur le segment AA'.

1.2.4.- MODE DE DEPENDANCE DES DEMI-DROITES ISSUES DE O.-

Si on pose dans le plan (θ, η) :

$$(I.19) \quad \theta + \eta = 2\lambda, \quad \theta - \eta = 2\mu,$$

on voit que les caractéristiques de l'équation (I.18) sont les parallèles aux bissectrices $\lambda = c^{te}$, $\mu = c^{te}$. Ces caractéristiques, dans le plan (η, θ) , sont les images des plans :

$$x_1 = \beta r \cos(2\lambda - \theta) \text{ et } x_1 = \beta r \cos(\theta - 2\mu),$$

qui sont les plans tangents au cône (Γ) . Les caractéristiques, passant par un point $\delta_0(\theta_0, \eta_0)$, sont les images de deux plans tangents au cône (Γ) que l'on peut mener par la demi-droite Δ_0 correspondant au point δ_0 du plan (θ, η) (fig. 3, page 12). Les génératrices de contact sont caractérisées sur le cône par les valeurs θ_1 et θ_2 de l'angle θ . On rencontre là un résultat qui semble s'opposer

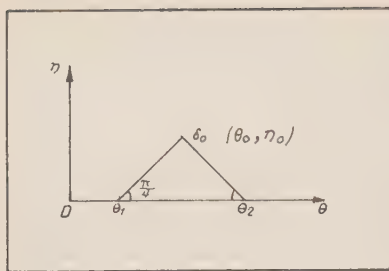


Fig. 3

gion intérieure à ce dièdre et extérieure au cône (Γ) a pour image dans le plan (θ, η) , le triangle $\theta_1 \delta_0 \theta_2$. Une demi-droite Δ_1 sera dite, *dépendante* ou *indépendante* de Δ_0 suivant que l'image de Δ_1 sera intérieure ou extérieure au triangle $\theta_1 \delta_0 \theta_2$. Ce raisonnement fait comprendre également pourquoi l'équation (I.14) présente le caractère elliptique à l'intérieur de (Γ) . D'une façon plus précise, deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 , intérieures à (Γ) , sont dans un état de *dépendance neutre* (ref.9). En effet, soit M_1 un point de Δ_1 , M_2 un point de Δ_2 ; supposons que M_1 soit extérieur à l'avant-cône de Mach de M_2 ; d'après le raisonnement du N° 1.1.4. il semble que le point M_2 soit indépendant de M_1 ; mais d'autre part, soit M'_1 un point de Δ_1 , intérieur à l'avant-cône de Mach de M_2 , M'_1 et M_1 sont équivalents, ce qui explique que M_2 n'est pas, en réalité, indépendant de M_1 (fig.4).

1.2.5. - LES CONDITIONS DE COMPATIBILITE. -

On peut alors prévoir comment se déroulera la solution d'un problème d'écoulement conique. On cherchera à résoudre ce problème dans la région (A') , ce qui, en général, sera assez facile puisque la solution générale de l'équation (I.18) s'écrit immédiatement en ajoutant une fonction arbitraire de la variable $\theta + \eta$ à une fonction arbitraire de la variable $\theta - \eta$. Ceci aura pour effet de "transporter" sur le segment AA' les conditions aux limites, relatives à la région (A') . En appliquant le théorème fondamental, on sera ramené à un problème de fonctions harmoniques dans la région (A) . Mais, en prenant comme fonctions inconnues les composantes u, v, w de la vitesse de perturbation; nous avons introduit trois fonctions inconnues (alors qu'il n'y en avait qu'une lorsque nous travaillions sur la fonction φ). Il y a donc certaines relations de compatibilité à écrire qui expriment, finalement, que le mouvement est bien irrotationnel.

Le mouvement sera irrotationnel si $u dx_1 + v dx_2 + w dx_3$ est une différentielle exacte, ce qui aura lieu si, et seulement si :

$$x_1 du + x_2 dv + x_3 dw = r (\beta \chi du + \cos \theta dv + \sin \theta dw)$$

est une différentielle exacte. Ceci ne peut se produire que si cette expression est identiquement nulle, u, v, w étant fonctions uniquement de θ et de χ (la différentielle totale ne comportant pas de terme en dr doit être indépendante de r):

...

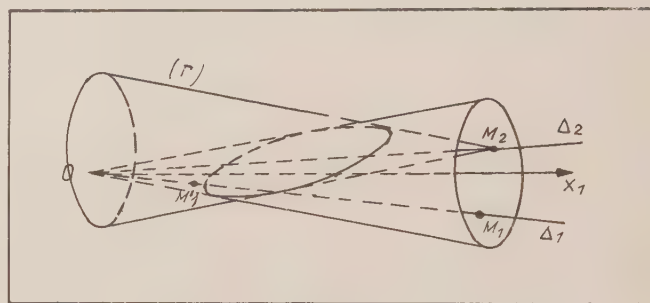


Fig. 4

Dans un écoulement conique le potentiel s'écrit :

$$\varphi = u x_1 + v x_2 + w x_3 = r (\beta u \chi + v \cos \theta + w \sin \theta),$$

u, v, w étant les composantes de la vitesse de perturbation.

On remarquera que φ est proportionnel à r .

De plus :

$$(I.20) \quad \beta \chi du + \cos \theta dv + \sin \theta dw = 0.$$

C'est cette relation qu'il s'agit d'écrire, d'une part dans le plan (θ, η) , d'autre part dans le plan (θ, ξ) .

a) Relations dans le plan (θ, η) . On peut écrire :

$$u = u_1(\lambda) + u_2(\mu),$$

et des formules analogues pour v et w , λ et μ étant définis par les relations

(I.19). On a, en particulier :

$$\frac{du_1}{d\lambda} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{du_2}{d\mu} = \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

D'ailleurs, d'après (I.20) :

$$(I.21) \quad \begin{aligned} \beta \cos \eta du_1 + \cos \theta dv_1 + \sin \theta dw_1 &= 0, \\ \beta \cos \eta du_2 + \cos \theta dv_2 + \sin \theta dw_2 &= 0; \end{aligned}$$

mais : $\theta = \lambda + \mu$, $\eta = \lambda - \mu$;

et par suite la première équation (I.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} \cos \mu \left[\beta \cos \lambda du_1 + \cos \lambda dv_1 + \sin \lambda dw_1 \right] + \\ + \sin \mu \left[\beta \sin \lambda du_1 - \sin \lambda dv_1 + \cos \lambda dw_1 \right] = 0; \end{aligned}$$

les deux quantités entre crochets étant uniquement fonctions de λ , l'égalité précédente entraîne :

$$\begin{aligned} \beta \cos \lambda du_1 + \cos \lambda dv_1 + \sin \lambda dw_1 &= 0, \\ \beta \sin \lambda du_1 - \sin \lambda dv_1 + \cos \lambda dw_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou encore :

$$(I.22) \quad -\beta du_1 = \frac{dv_1}{\cos 2\lambda} = \frac{dw_1}{\sin 2\lambda}.$$

On montrerait de même que :

$$(I.23) \quad -\beta du_2 = \frac{dv_2}{\cos 2\mu} = \frac{dw_2}{\sin 2\mu}.$$

b) Relations dans le plan (θ, ξ) .

Le calcul est tout à fait analogue. L'équation (I.16) nous incite à introduire la variable complexe $\zeta = \theta + i\xi$ et les fonctions $U(\zeta)$, $V(\zeta)$, $W(\zeta)$, définies à une constante additive imaginaire près, dont les parties réelles dans (A) sont respectivement identiques à $u(\theta, \xi)$, $v(\theta, \xi)$, $w(\theta, \xi)$.

L'équation (I.20) permet d'écrire :

$$\beta \operatorname{ch} \xi dU + \cos \theta dV + \sin \theta dW = 0.$$

Si l'on pose :

$$\theta + i \xi = \zeta, \quad \theta - i \xi = \bar{\zeta},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\bar{\zeta}}{2} \left[\beta \cos \frac{\zeta}{2} dU + \cos \frac{\zeta}{2} dV + \sin \frac{\zeta}{2} dW \right] \\ + \sin \frac{\bar{\zeta}}{2} \left[\beta \sin \frac{\zeta}{2} dU - \sin \frac{\zeta}{2} dV + \cos \frac{\zeta}{2} dW \right] = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut comme précédemment :

$$(I.24) \quad -\beta dU = \frac{dV}{\cos \zeta} = \frac{dW}{\sin \zeta}.$$

Les formules (I.22), (I.23), (I.24) expriment les relations de compatibilité que nous avons en vue.

REMARQUE. —

Nous utiliserons souvent la représentation conforme pour étudier les problèmes relatifs au domaine (A). En particulier, si l'on pose :

$$Z = e^{i\zeta} = e^{-\xi} e^{i\theta}$$

on voit que (A) devient dans le plan Z l'aire intérieure au cercle (C_0) de centre $O(1)$ et de rayon 1 (fig. 5).

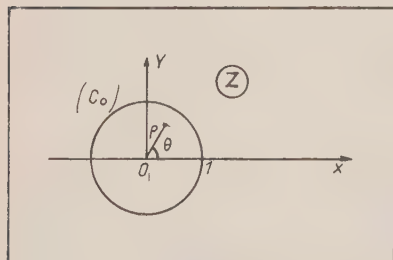


Fig. 5

Si l'on pose $Z = \rho e^{i\theta}$, le point Z est l'image d'une demi-droite, issue de l'origine de l'espace (x_1, x_2, x_3) , caractérisée par l'angle θ et le rapport :

$$\frac{x_1}{\beta r} = \chi = \frac{1 + \rho^2}{2\rho}.$$

L'origine du plan Z correspond à l'axe du cône (Γ) , le cercle (C_0) au cône (Γ) lui-même. Un problème d'écoulement conique se traduit d'une façon plus intuitive dans le plan Z que dans le plan ζ . Dans

le plan Z, les formules (I.24) s'écrivent :

$$(I.25) \quad -\beta dU = \frac{2 Z dV}{Z^2 + 1} = 2 i Z \frac{dW}{Z^2 - 1}.$$

Nous utiliserons encore le plan z défini par :

$$z = \frac{2 Z}{Z^2 + 1};$$

(1) Aucune confusion n'est possible entre le point O, origine du système d'axes x_1, x_2, x_3 , et le point O, introduit ici comme origine du plan Z.

Le domaine (A) correspond conformément au plan z entaillé par les demi-droites Ax , $A'x'$ (fig.6), le cône (Γ) aux bords des coupures ainsi déterminées, l'axe du cône (Γ) à l'origine du plan z . Les relations de compatibilité dans le plan z prennent alors la forme :

$$(I.26) \quad -\beta dU = z dV = -\frac{i z dW}{\sqrt{1-z^2}}.$$

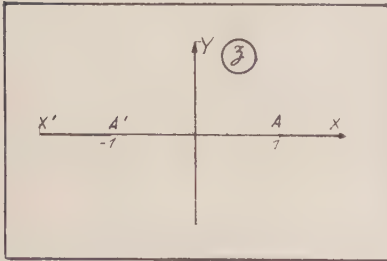


Fig. 6

1.2.3. - CONDITIONS AUX LIMITES : LES DEUX GRANDS TYPES D'ÉCOULEMENTS CONIQUES. -

Les conditions aux limites s'obtiennent en écrivant que le vecteur vitesse est tangent au cône obstacle. Soit, par exemple, $x_2(t)$, $x_3(t)$, une représentation paramétrique de la section $x_1 = \beta$ du cône; x_3 , $x'_2 - x_2 x'_3$, $\beta x'_3$, $-\beta x'_2$, constituent un système de paramètres directeurs de la normale au cône obstacle, et la condition aux limites s'écrit :

$$(I.27) \quad w x'_2 - v x'_3 = \frac{1}{\beta} (x_3 x'_2 - x_2 x'_3) (1 + u).$$

Cette condition pourra être simplifiée suivant les cas. Mais la simplification s'opérera de façon différente suivant l'écoulement conique étudié. Or, d'après le numéro 1.1.2. il peut exister deux grands types d'écoulements coniques.

1) *L'écoulement autour de cônes infiniment peu ouverts*, c'est-à-dire de cônes tels que chaque génératrice fasse, avec le vecteur $\vec{U}$, un angle qui reste petit. Naturellement, la section du cône peut, dans ces conditions, être de forme quelconque; l'écoulement à l'extérieur de (Γ) étant non perturbé (vitesse équipollente à $\vec{U}$), sur le cône (Γ), u , v , w sont nuls.

Le problème pourra se traiter dans le plan Z ; $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$ auront des parties réelles nulles sur (C_0). L'image (C) de l'obstacle, dans le plan Z , est définie par une relation $\rho = f(\theta)$, et par suite, on obtiendra une représentation paramétrique de la section $x_1 = \beta$ par les formules :

$$x_2 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \theta, \quad x_3 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin \theta;$$

la condition (I.27) devient donc :

$$(I.28) \quad w [\rho \sin \theta - \rho' \cos \theta + \rho^2 (\rho \sin \theta' + \rho' \cos \theta)] + v [\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta + \rho^2 (\rho \cos \theta' - \rho' \sin \theta)] = \frac{2\rho^2}{\beta} (1 + u),$$

θ étant pris comme paramètre, ρ' désignant la dérivée de ρ par rapport à θ . L'étude des mouvements coniques infiniment peu ouverts fera l'objet du chapitre 2.

2) *L'écoulement autour de cônes aplatis*, c'est-à-dire de cônes dont les génératrices s'écartent peu d'un plan contenant $\vec{U}$. Rappelons que (N° 1.1.2.) le plan tangent doit faire un angle petit avec $\vec{U}$, par conséquent, en toute rigueur, la section d'un tel cône ne peut pas être une courbe fermée régulière, une ellipse par exemple; elle doit présenter un profil lenticulaire (fig.7 page 16). Nous étudierons au chapitre III les mouvements autour de tels cônes.

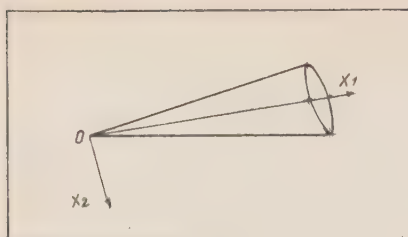


Fig. 7

REMARQUE. -

Nous n'avons pas ainsi épuisé, en effet, tous les types d'écoulements coniques, c'est-à-dire pour lesquels la linéarisation est légitime. On peut, par exemple, obtenir des écoulements autour de cônes dont la section présente la forme donnée dans la figure 8, l'axe d'un tel cône étant infiniment peu incliné sur $\vec{U}$.

Avant d'entamer l'étude de ces mouvements, nous allons, pour terminer ces généralités, introduire une généralisation des mouvements coniques, dont nous verrons l'utilisation possible dans un chapitre ultérieur.

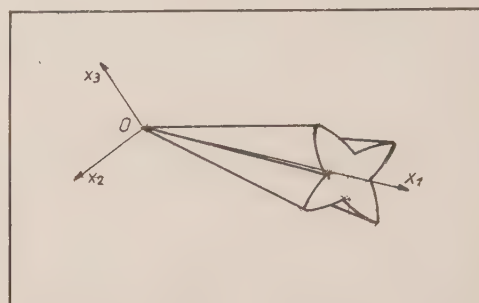


Fig. 8

1.3.- Les mouvements homogènes.-**1.3.1.- DEFINITION ET PROPRIETES.-**

Les mouvements coniques sont des mouvements pour lesquels le potentiel des vitesses est de la forme ;

$$\varphi = r^f(\theta, \chi),$$

comme nous l'avons vu au numéro I.2.5.. On peut envisager des mouvements pour lesquels :

$$\varphi = r^n f(\theta, \chi);$$

nous les appellerons mouvements homogènes d'ordre n .⁽¹⁾ Les mouvements coniques définis au N° 1.2. sont donc des mouvements homogènes d'ordre I. Nous garderons cependant le terme d'écoulement conique pour désigner ces mouvements, car ce terme a déjà été utilisé par de nombreux auteurs et fait bien image.

Les dérivés du potentiel des vitesses par rapport aux variables x_1, x_2, x_3 satisfont toutes à l'équation (I.10). Si l'on considère alors les dérivées d'ordre n du potentiel d'un mouvement homogène d'ordre n , elles ne dépendent que de χ et θ , et satisfont à l'équation (I.14); l'analyse du numéro 1.2.2. reste entièrement valable. On peut faire les changements de variables (I.15) et (I.17) qui conduisent aux équations (I.16) et (I.18). Il y a donc là une méthode assez générale pour obtenir des solutions de l'équation (I.10) qui peut s'avérer utile.

Les mouvements les plus simples sont les mouvements homogènes d'ordre 0, ils ne donnent lieu à aucune condition particulière de compatibilité. Pour les mouvements d'ordre n , il y a par contre un certain nombre de conditions à écrire liant les dérivées d'ordre n . Nous examinerons⁽²⁾, à titre d'exemple, le cas de mouvements homogènes d'ordre 2.

(1) La définition des mouvements homogènes d'ordre n a été donnée la première fois par L. Beshkine (ref. 11); cet auteur les appelle d'ailleurs mouvements coniques d'ordre n . Il y a lieu de rattacher également cette question à l'article de Hayes (ref. 12).

(2) Voir annexe n° 2.

Il y a six dérivées secondes que nous noterons φ_{ij} (i et j peuvent prendre indépendamment les valeurs 1, 2, 3), φ_{ij} désignant $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$. A l'extérieur de (Γ) nous poserons :

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ij}^1 + \varphi_{ij}^2,$$

φ_{ij}^1 n'étant fonction que de λ , φ_{ij}^2 de μ (voir formule I.19). A l'intérieur de (Γ) , φ_{ij} est la partie réelle d'une fonction $\Phi_{ij}(\zeta)$.

Pour obtenir les relations cherchées, il suffit de remarquer que :

$$\varphi_{ij} dx_j = d\varphi_i$$

et d'appliquer les résultats du N° I.2.5; on peut donc écrire entre les φ_{ij}^1 les six relations :

$$-\beta d\varphi_{i1}^1 = \frac{1}{\cos 2\lambda} d\varphi_{i2}^1 = \frac{1}{\sin 2\lambda} d\varphi_{i3}^1 \quad (i = 1, 2, 3),$$

qui d'ailleurs se réduisent à cinq, comme on le voit immédiatement. On aura des relations analogues pour les fonctions φ_{ij}^2 (il suffit d'intervertir le rôle de λ et de μ).

Enfin, pour les fonctions analytiques $\Phi_{ij}(\zeta)$, on a :

$$-\beta d\Phi_{i1} = \frac{1}{\cos \zeta} d\Phi_{i2} = \frac{1}{\sin \zeta} d\Phi_{i3},$$

soit six relations qui, comme précédemment, se réduisent à cinq. Les conditions écrites sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes, les fonctions φ_i étant nécessairement les composantes d'un gradient. On voit ainsi qu'il n'y a aucune difficulté à écrire les conditions de compatibilité pour un mouvement homogène d'ordre n .

1.3.2. - RELATIONS ENTRE LES ECOULEMENTS HOMOGENES D'ORDRE n ET $n-1$.

Nous allons établir un théorème qui peut être utile dans certaines questions et qui précise les relations existant entre les écoulements homogènes d'ordre n et $n-1$; nous examinerons le cas où $n=1$.

1.3.2.1. - Considérons à l'intérieur du cône (Γ) un écoulement homogène d'ordre 0 défini par :

$$\varphi = \mathcal{R} [\Phi(Z)];$$

Nous allons chercher tout d'abord les composantes u , v , w de la vitesse de perturbation :

$$d\varphi = u dx_1 + v dx_2 + w dx_3 = \mathcal{R} [\Phi'(Z) dZ] = \mathcal{R} \left[Z \Phi'(Z) \frac{dZ}{Z} \right],$$

or :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{d\rho}{\rho} + i d\theta;$$

$$x_1 = \beta r \frac{1 + \rho^2}{2\rho}, \quad x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta;$$

donc :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \left[\frac{dx_1}{x_1} - \frac{x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{r^2} \right],$$

$$d\theta = \frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{r^2},$$

d'où l'on déduit :

$$u = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \frac{1}{x_1} \Re \left[Z \Phi' (Z) \right],$$

$$v = -\frac{\cos \theta}{r} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \Re \left[Z \Phi' (Z) \right] + \frac{\sin \theta}{r} \Im \left[Z \Phi' (Z) \right],$$

$$w = -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \Re \left[Z \Phi' (Z) \right] - \frac{\cos \theta}{r} \Im \left[Z \Phi' (Z) \right],$$

mais :

$$Z + \frac{1}{Z} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \cos \theta + i \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \sin \theta,$$

$$Z - \frac{1}{Z} = \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \cos \theta + i \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \sin \theta;$$

d'où le résultat :

$$(I.29) \begin{cases} u = \frac{1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \Re \left[Z \Phi' (Z) \right], \\ v = \frac{1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \Re \left[-\frac{\beta}{2} (Z^2 + 1) \Phi' (Z) \right], \\ w = \frac{1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \Re \left[\frac{i\beta}{2} (Z^2 - 1) \Phi' (Z) \right]. \end{cases}$$

1.3.2.2. — Considérons maintenant un point O' ($x_1 = \varepsilon_1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), ε_1 étant une quantité très petite. Soit M un point de coordonnées (x_1 , r , θ) par rapport à O , intérieur à (Γ) , et de paramètre (ρ, θ) dans le plan Z . Pour l'écoulement conique (homogène d'ordre 1), de sommet O' , ses coordonnées sont : $(x_1 - \varepsilon_1, r, \theta)$, et ses paramètres dans le plan Z :

$$\rho \left(1 - \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right), \theta,$$

car :

$$dx_1 = -\varepsilon_1 = \beta r \frac{\rho^2 - 1}{2 \rho^2} d\rho = x_1 \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Considérons alors deux champs coniques identiques, mais de sommet O et O' ,

et faisons leur différence. Nous allons obtenir un champ de vitesses qui par suite du caractère linéaire de l'équation (I.10) satisfera à cette équation. Si :

$$u_o = \mathcal{R} \left[F(Z) \right],$$

désigne la composante u du champ de sommet O , on a comme composante u dans le "champ différence" :

$$(I.30) \quad u = + \mathcal{R} \left[F(Z) \right] - \mathcal{R} \left[F \left(Z - \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \frac{\varepsilon_1}{x_1} Z \right) \right] = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \frac{\varepsilon_1}{x_1} \mathcal{R} \left[Z F'(Z) \right],$$

ε_1 étant considéré comme infiniment petit. De plus, d'après les relations (I.25) les composantes v et w s'écrivent :

$$(I.31) \quad \begin{cases} v = \frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[-\frac{\beta}{2} (Z^2 + 1) F'(Z) \right], \\ w = \frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[i \frac{\beta}{2} (Z^2 - 1) F'(Z) \right]. \end{cases}$$

1.3.2.3. — Considérons le point $O'' (0, \varepsilon_2, 0)$, ε_2 étant une quantité petite; soit M un point de coordonnées (x_1, r, θ) par rapport à O , intérieur à (Γ) , de paramètres (ρ, θ) dans le plan Z . Pour l'écoulement de sommet O'' , les coordonnées de M sont $(x_1, r - \varepsilon_2 \cos \theta, \theta + \varepsilon_2 \frac{\sin \theta}{r})$, comme il est facile de le constater en projetant M en m sur le plan $x_2 x_3$ (fig. 9). Mais d'autre part :

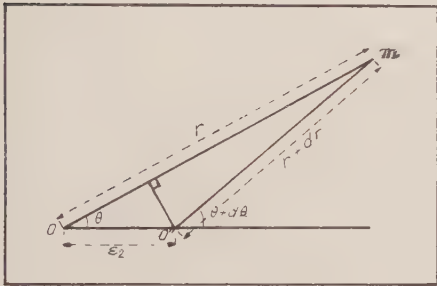


Fig. 9

$$dr = \frac{2 x_1}{\beta} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2)^2} d\rho = - \varepsilon_2 \cos \theta,$$

$$r d\theta = \frac{2 x_1}{\beta} \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\theta = \varepsilon_2 \sin \theta;$$

donc :

$$dZ = e^{i\theta} \left[d\rho + i \rho d\theta \right] = \varepsilon_2 \frac{1 + \rho^2}{2 x_1} \beta \left[i \sin \theta - \cos \theta \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \right] e^{i\theta},$$

$Z + dZ$ représentant le point M dans le champ conique de sommet O'' .

Considérons alors deux écoulements coniques, identiques, mais de sommets O et O'' et faisons leur différence. Nous obtiendrons un champ de vitesses qui, par suite du caractère linéaire de l'équation (I.10), satisfera à cette équation. Si :

$$v_o = \mathcal{R} \left[G(Z) \right]$$

désigne la composante v du champ de sommet O , on a comme composante v dans le champ différence :

$$\begin{aligned}
 v &= + \mathcal{R} \left[G(Z) \right] - \mathcal{R} \left[G(Z + dZ) \right] = - \mathcal{R} \left[G'(Z) \cdot dZ \right], \\
 &= - \frac{\varepsilon_2 \beta}{2 x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[G'(Z) \left[\cos \theta (1 + \rho^2) + i \sin \theta (\rho^2 - 1) \right] e^{i\theta} \right], \\
 &= - \frac{\varepsilon_2 \beta}{2 x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[Z G'(Z) \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \right], \\
 (I.32) \quad &= \frac{\varepsilon_2}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[- \frac{\beta}{2} (Z^2 + 1) G'(Z) \right];
 \end{aligned}$$

d'ailleurs, d'après (I.25), les composantes u et w s'écrivent :

$$(I.33) \quad \begin{cases} u = \frac{\varepsilon_2}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[Z G'(Z) \right], \\ w = \frac{\varepsilon_2}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[\frac{i \beta}{2} (Z^2 - 1) G'(Z) \right]. \end{cases}$$

1.3.2.4. — Ces trois lemmes établis, il est aisé de démontrer la propriété que nous avons en vue. Appelons "potentiel complexe" d'un écoulement homogène d'ordre 0 la fonction $\Phi(Z)$ (N° 1.3.2.1) telle que :

$$\varphi = \mathcal{R} \left[\Phi(Z) \right],$$

"vitesse complexe" d'un champ conique dans la direction $\vec{l}$ la fonction de variable complexe dont la partie réelle donne à l'intérieur de (Γ) la projection de la vitesse de perturbation dans la direction $\vec{l}$, "champ dérivé d'un écoulement conique" dans la direction $\vec{l}$, le champ de vitesses obtenu par différence de deux champs coniques identiques dont les sommets sont infiniment voisins et alignés sur une parallèle à $\vec{l}$; nous pourrions alors énoncer :

THEOREME : Le champ dérivé d'un écoulement conique dans la direction $\vec{l}$ est le champ de vitesses d'un écoulement homogène d'ordre zéro : le potentiel complexe de cet écoulement d'ordre zéro est proportionnel à la vitesse complexe du champ conique donné dans la direction $\vec{l}$, le facteur de proportionnalité étant réel.

La démonstration est immédiate. D'après les numéros 1.1.2 et 1.1.3, on peut, pour définir un écoulement homogène, se contenter de considérer l'intérieur du cône (Γ) ; la comparaison des formules (I.29), (I.30), (I.31), (I.32), (I.33) entraîne la validité du théorème lorsque $\vec{l}$ est parallèle à $\vec{U}$ ou orthogonal à $\vec{U}$. Le cas général, où $\vec{l}$ est quelconque, s'en déduit immédiatement : si $F(Z)$, $G(Z)$, $H(Z)$ sont les vitesses complexes en projection sur Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 , la composante u du champ dérivé dans la direction $\vec{l}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) a pour expression :

$$u = \frac{1}{x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[Z \left[\varepsilon_1 F'(Z) + \varepsilon_2 G'(Z) + \varepsilon_3 H'(Z) \right] \right];$$

or, $\varepsilon_1 F(Z) + \varepsilon_2 G(Z) + \varepsilon_3 H(Z)$ étant la vitesse complexe en projection sur $\vec{l}$, la comparaison de cette formule avec la première formule (I.29) démontre complètement le théorème.

COROLLAIRE. — Le champ dérivé dans la direction $\vec{l}$ d'un écoulement conique dont la vitesse complexe dans la direction $\vec{l}$ est $K(Z)$ est un champ de vitesses d'un écoulement homogène ne dépendant que de $K(Z)$ (et non de la direction $\vec{l}$).

Le théorème qui vient d'être démontré peut s'étendre sans difficultés aux écoulements homogènes d'ordre n et $n-1$. L'énoncé de ce théorème général demanderait simplement de préciser quelques définitions; comme nous n'aurons pas à l'utiliser par la suite, nous ne formulerons pas cet énoncé.

2.- LES ECOULEMENTS CONIQUES INFINIMENT PEU OUVERTS

2.1.- Solution du problème.-

2.1.1.- GENERALITES.-

Nous allons nous occuper du premier problème posé au numéro 1.2.6. Nous opérerons dans le plan Z . Rappelons que le cône (Γ) a pour image le cercle (C_0) de rayon 1 centré à l'origine, l'image de l'obstacle est une courbe (C) , définie par son équation polaire $\rho(\theta)$. On désignera par (D) le domaine annulaire compris entre (C) et (C_0) ; on appellera (γ_0) le cercle de plus petit rayon centré à l'origine et contenant (A) à son intérieur, on désignera par k le rayon du cercle (γ_0) . Dans tout ce chapitre, k sera considéré comme l'infiniment petit principal.

Le problème consiste alors à trouver trois fonctions $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$ définies à l'intérieur de (D) à une constante additive imaginaire près, et telles que :

$$1) \quad (I.25) \quad -\beta \, dU = \frac{2Z}{Z^2 + 1} \, dV = \frac{2iZ}{Z^2 - 1} \, dW ,$$

2) les parties réelles u , v , w , uniformes, s'annulent sur (C_0) ;

3) sur (C) , on a la relation :

$$v \left[\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta + \rho^2 (\rho \cos \theta - \rho' \sin \theta) \right] + w \left[\rho \sin \theta - \rho' \cos \theta + \rho^2 (\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta) \right] = \frac{2\rho^2}{\beta} (1 + u) .$$

Ainsi posé, le problème est évidemment très difficile à résoudre dans toute sa généralité, mais une analyse des approximations permises va permettre de le simplifier considérablement.

2.1.2.- ETUDE DES FONCTIONS $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$.-

2.1.2.1.- Une fonction analytique de Z sera dite fonction (A) si sa partie réelle s'annule sur (C_0) . Désignons par (γ'_0) le cercle de rayon $1/k$, centré à l'origine, et par (D') la couronne limitée par (γ_0) et (γ'_0) (fig. 10).

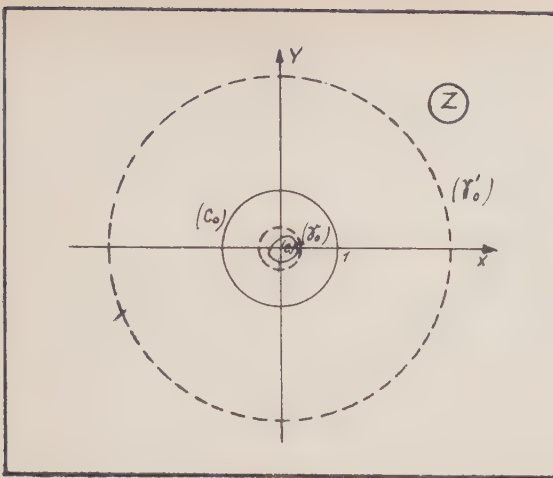


Fig. 10

LEMME I.- Une fonction (A), uniforme, définie à l'intérieur de la couronne limitée par (γ_0) et (γ'_0) peut être prolongée dans tout le domaine (D') .

Ceci résulte immédiatement du principe de Schwartz. Soient M et M' deux points symétriques par rapport à (C_0) , M étant intérieur à (C_0) ; on définit la fonction (A), au point (M') comme ayant une partie réelle opposée et une partie imaginaire égale respectivement, à la partie réelle et à la partie imaginaire de la fonction donnée au point M.

LEMME II.- Une fonction (A) holomorphe à l'intérieur de (D') a un déve-

loppement de Laurent de la forme (1):

$$i \beta + \sum_1^{\infty} \left(\frac{K_n}{Z^n} - \bar{K}_n Z^n \right).$$

En effet, soit $H(Z) = h + ih'$ une telle fonction (A). Ecrivons provisoirement son développement de Laurent dans (D') sous la forme :

$$H(Z) = \sum_0^{\infty} J_n Z^n + \sum_1^{\infty} \frac{K_n}{Z^n}.$$

La démonstration est immédiate, et résulte des formules définissant J_n et K_n :

$$K_n = \frac{k^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h + ih') \gamma_0 e^{in\theta} d\theta,$$

$(h + ih') \gamma_0$ désignant la valeur de H sur (γ_0) ; de même :

$$J_n = \frac{k^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h + ih') \gamma'_0 e^{-in\theta} d\theta.$$

Par suite, d'après le lemme I :

$$\bar{K}_n = -J_n;$$

de plus :

$$J_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} H(Z) \frac{dZ}{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h + ih') c_0 d\theta = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} h' c_0 d\theta.$$

(1) Rappelons que $\bar{K}_n$ désigne l'imaginaire conjugué de K_n .

est imaginaire pur, le lemme II se trouve ainsi démontré.

Remarquons que, si $H(Z)$ est borné par M sur (γ_0) ou (γ'_0) , on a l'inégalité :

$$(II.1) \quad |K_n| <^M k^n.$$

LEMME III. — Une fonction (A) , à partie réelle uniforme, définie dans (D) , est susceptible à l'intérieur de (D') d'un développement de la forme :

$$(II.2) \quad B \log Z + i \beta + \sum_1^{\infty} \left(\frac{K_n}{Z^n} - \bar{K}_n Z^n \right),$$

B étant réel.

En effet, la dérivée de la fonction (A) est nécessairement uniforme. On sait alors (voir, par exemple, ref. 13) que l'on peut considérer la fonction donnée comme la somme d'une fonction $H(Z)$ uniforme et d'un terme logarithmique; le point critique du logarithme étant arbitraire à l'intérieur de (γ_0) , il est particulièrement indiqué de choisir ce point à l'origine : la partie réelle de la fonction étant uniforme, le coefficient de $\log Z$ est réel. D'ailleurs, $\log Z$ ayant une partie réelle nulle sur (C_0) , $H(Z)$ est elle-même une fonction (A) . La fonction donnée peut donc être prolongée à l'intérieur de (D') et le développement (II.2) se trouve ainsi justifié.

REMARQUE. —

Si l'on choisit comme pôle du terme logarithmique un point intérieur à (γ_0) mais différent de l'origine, on est conduit à un développement de la forme :

$$B' \log \left(\frac{Z-a}{\bar{a}Z-1} \frac{\bar{a}-1}{1-a} \right) + i \beta + \sum_1^{\infty} \left(\frac{K'_n}{Z^n} - \bar{K}'_n Z^n \right) \dots$$

2.1.2.2. — Les fonctions U, V, W de la variable Z sont toutes les trois des fonctions (A) à partie réelle uniforme et, par suite, sont susceptibles de développements de la forme (II.2). Nous écrirons dorénavant :

$$(II.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\beta}{2} U(Z) = A \log Z + i \alpha + \sum_1^{\infty} \left(\frac{J_n}{Z^n} - \bar{J}_n Z^n \right), \\ V(Z) = B \log Z + i \beta + \sum_1^{\infty} \left(\frac{K_n}{Z^n} - \bar{K}_n Z^n \right), \\ W(Z) = C \log Z - i \gamma + \sum_1^{\infty} \left(\frac{L_n}{Z^n} - \bar{L}_n Z^n \right); \end{array} \right.$$

A, B, C sont réels, α, β, γ sont réels et d'ailleurs arbitraires; mais ces développements ne sont pas indépendants, car il faut tenir compte des relations (I.25). Par exemple, $Z dV/dZ$ doit être divisible par $Z^2 + 1$, sinon nous aurions pour U des singularités logarithmiques sur le cône (Γ) , ce qui est inadmissible. Or :

$$Z \frac{dV}{dZ} = B - \sum_1^{\infty} n \left(\frac{K_n}{Z^n} + \bar{K}_n Z^n \right) ;$$

On en déduit les relations :

$$(II.4) \quad \begin{cases} B = \sum_1^{\infty} (-1)^p 2p \left[K_{2p} + \bar{K}_{2p} \right] , \\ 0 = \sum_0^{\infty} (-1)^p (2p+1) \left[K_{2p+1} - \bar{K}_{2p+1} \right] , \end{cases}$$

obtenues en faisant, dans l'égalité précédente $Z = i$ et $Z = -i$.

De même, $Z dW/dZ$ doit être divisible par $Z^2 - 1$, ce qui donne :

$$(II.5) \quad \begin{cases} C = \sum_1^{\infty} 2p (L_{2p} + \bar{L}_{2p}) , \\ 0 = \sum_0^{\infty} (2p+1) (L_{2p+1} + \bar{L}_{2p+1}) . \end{cases}$$

Enfin les égalités (I.25) conduisent en outre à des relations liant entre eux les coefficients des développements (II.3); on peut écrire ainsi les relations :

$$(II.6) \quad \begin{aligned} B + 2 K_2 &= -i \left[C - 2L_2 \right], \quad \bar{K}_1 - K_1 = -i \left[\bar{L}_1 + L_1 \right] \\ n K_n - (n-2) K_{n-2} &= i \left[(n-2) \bar{L}_{n-2} + n L_n \right], \quad (n \geq 2) , \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(II.7) \quad \begin{cases} B = -(\bar{J}_1 + J_1), \quad K_1 = -A + 2 J_2 , \\ n K_n = (n-1) J_{n-1} + (n+1) J_{n+1}, \quad (n \geq 2) . \end{cases}$$

2.1.2.3. - Approximations sur les développements (II.3).

Il faut, en outre, tenir compte des hypothèses de linéarisation; ce qui va nous permettre, nous allons le voir, de simplifier considérablement les développements (II.3) et nous conduire très simplement à la solution du problème posé au numéro 2.1.1.

Les égalités (II.6) nous conduisent à penser que $V(Z)$ et $W(Z)$ sont du même ordre. Nous désignerons par M une borne supérieure de leur module sur le cercle (γ_0) . M sera également une borne de leur module sur (γ'_0) et par suite dans tout le domaine (D') :

Si on utilise l'inégalité (II.1), (II.4) montre que ¹⁾ :

$$B = O(M k^2), \quad K_1 - \bar{K}_1 = O(M k^2) .$$

(1) O désigne le symbole de Landau, $A = O(M k^2)$ signifie que $\frac{A}{M k^2}$ est borné quand k tend vers 0.

Si on prend α, β, γ nuls dans la suite, ce qui ne diminue en rien la généralité, on peut écrire la seconde formule (II.3) sous la forme :

$$V(Z) = \mathcal{R}(K_1) \cdot \left(\frac{1}{Z} - Z\right) - \sum_2^{\infty} \frac{K_n}{Z^n} = B \log Z - \sum_2^{\infty} \bar{K}_n Z^n + i \mathcal{J}(K_1) \left(\frac{1}{Z} + Z\right),$$

et par suite :

Dans la couronne limitée par (γ_0) et (C_0) , le second membre de cette égalité est

$$O(Mk^2 \log k).$$

De même d'après (II.5) :

$$C = O(Mk^2), L_1 + \bar{L}_1 = O(Mk^3),$$

$$W(Z) = i \mathcal{J}(L_1) \left(\frac{1}{Z} + Z\right) - \sum_2^{\infty} \frac{L_n}{Z^n} = C \log Z + \mathcal{R}(L_1) \left(\frac{1}{Z} - Z\right) - \sum_2^{\infty} \bar{L}_n Z^n.$$

Dans la couronne comprise entre (γ_0) et (C_0) , le deuxième membre de cette égalité est aussi

$$O(Mk^2 \log k).$$

De plus, d'après (II.6) :

$$K_{n-2} + iL_{n-2} = O(Mk^n), (n > 2).$$

Donc :

$$W(Z) - iV(Z) = O(Mk^2 \log k) + 2iK_1 Z,$$

dans la couronne (γ_0, C_0) .

Enfin d'après (II.7) :

$$A = -K_1 + O(Mk^3), J_n = \frac{n+1}{n} K_{n+1} + O(Mk^{n+2}).$$

Donc :

$$-\frac{\beta}{2} U(Z) = -\mathcal{R}(K_1) \log Z - 2\bar{K}_2 Z + \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{K_{n+1}}{Z^n} + O(Mk^3 \log k).$$

En résumé, si on se contente de définir $V(Z)$ et $W(Z)$ à $O(Mk^2 \log k)$ près et $U(Z)$ à $O(Mk^3 \log k)$ près, on peut écrire dans la couronne (γ_0, C_0) :

$$(II.8) \quad W(Z) = iV(Z) + 2iK_1 Z,$$

$$(II.9) \quad V(Z) = H(Z) - K_1 Z,$$

avec :

$$(II.10) \quad H(Z) = \sum_1^{\infty} \frac{K_n}{Z^n},$$

et :

$$(II.11) \quad U(Z) = -\frac{2}{\beta} \left[\int_Z \frac{dH}{dZ} dZ - 2\bar{K}_2 Z \right]$$

Le coefficient K_1 peut être supposé réel, et l'intégration figurant dans (II.11) doit être faite de manière que $\Re[U(Z)]$ soit un infiniment petit du troisième ordre au moins sur $|Z| = 1$.

2.1.2.4. — REMARQUES. —

1) — La formule (II.8) qui est la plus importante peut s'établir immédiatement à partir de la deuxième formule (I.25). Mais la méthode suivie dans le texte, si elle est un peu longue, nous apparaît plus naturelle et elle met mieux en évidence les développements des fonctions U, V, W .

2) — Les hypothèses faites au cours de cette étude doivent, en toute rigueur, être vérifiées par les solutions trouvées dans chaque cas particulier. Nous ne ferons pas dans la suite cette vérification qui se trouve automatiquement satisfaite dans les cas usuels.

3) — Les résultats obtenus par l'analyse précédente et condensés dans les formules (II.8), (II.9), (II.11) ne sont valables en toute rigueur que dans la couronne (γ_0, C_0) et non dans le domaine (D) . Mais il est tout d'abord facile d'étendre, par prolongement analytique, la définition de H dans (D) . En effet, supposons d'abord que (C) contienne O à son intérieur, comme on peut écrire $V(Z)$ sous la forme :

$$V(Z) = H(Z) - \sum_1^{\infty} \bar{K}_n Z^n + B \log Z,$$

on voit que, $V(Z)$ étant par hypothèse défini dans (D) , et $\sum_1^{\infty} \bar{K}_n Z^n$ et $B \log Z$ pouvant être prolongés à l'intérieur de (γ_0) jusqu'à (C) , $H(Z)$ peut lui-même sans difficulté être défini à l'intérieur de (D) . Le cas où (C) ne contient pas l'origine n'offre pas de difficulté; il suffit alors d'utiliser le développement donné à la fin du numéro 2.12.1.

En ce qui concerne l'ordre des termes négligés lorsqu'on écrit l'égalité (II.9) dans le domaine (D) , on voit qu'ils sont $O(M k^2 \log k)$ dans (D) dans le cas où il existe à l'intérieur de (C) un cercle de rayon λk , λ et $1/\lambda$ pouvant être considérés comme $O(1)$. D'ailleurs, s'il n'en est pas ainsi, on peut justifier la validité des résultats des formules (II.8), (II.9), (II.10), (II.11), en opérant une représentation conforme du domaine (D) sur un anneau; le rayon du cercle image de (C_0) peut être supposé égal à 1, le cercle image de (C) a un rayon infiniment petit du premier ordre par rapport à k et l'étude peut se faire dans le nouveau plan de variable complexe ainsi introduit, sans complication essentielle.

2.1.3. — REDUCTION DU PROBLEME A UN PROBLEME D'HILBERT. —

D'après la formule (II.8), si on pose :

$$V = v + i v',$$

v' désignant la partie imaginaire de V , on peut écrire sur (C) la relation :

$$v = -v' ;$$

comme, naturellement, avec les approximations consenties, on peut négliger dans

le second membre de la formule (I.28), u devant 1, on voit que cette condition aux limites (I.28) ne porte plus que sur une seule fonction analytique, la fonction $V(Z)$; ceci est une première conséquence fondamentale de l'étude précédente. La formule (II.9) montre que cette condition consiste à poser une relation linéaire entre les parties réelles et imaginaires de $H(Z)$ sur l'obstacle. Or d'après (II.10) la fonction $H(Z)$ est une fonction holomorphe à l'extérieur de (C) régulière à l'infini; le problème posé, qui initialement était relatif à une aire annulaire (D) est ainsi ramené à un problème d'Hilbert pour la fonction H définie dans une aire simplement connexe; d'une façon précise, on a à résoudre un problème d'Hilbert extérieur. Telle est la deuxième conséquence fondamentale des résultats du numéro 2.1.2.

Comme nous ne cherchons à calculer $V(Z)$ et $W(Z)$ qu'à $O(M k^2 \log k)$ près, et $U(Z)$ à $O(M k^3 \log k)$ près, la relation (I.28) qui s'écrit :

$$\Re \left[(v - iw) \left[2 Z \rho^2 d\theta - i dZ (1 - \rho^2) \right] \right] = \frac{2 \rho^2}{\beta} d\theta,$$

peut être simplifiée et réduite à :

$$\Re \left[-i dZ (v - iw) \right] = \frac{2 \rho^2}{\beta} d\theta.$$

Sur (C) , $K_1 Z$ est, d'après (II.1) de l'ordre de $M k^2$, et par suite :

$$H = V = v + i v' = v - i w,$$

par conséquent, sur (C) , H satisfait à la condition d'Hilbert :

$$(II.12) \quad \Re \left[-i H(Z) dZ \right] = \frac{2 \rho^2}{\beta} d\theta.$$

2.1.4. - SOLUTION DU PROBLÈME D'HILBERT. -

Il s'agit de trouver une fonction $H(Z)$, holomorphe à l'extérieur de (C) , régulière et nulle à l'infini, satisfaisant sur (C) à la relation (II.12). Soit :

$$(II.13) \quad z = Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots$$

la représentation conforme canonique de l'extérieur de (C) sur l'extérieur d'un cercle (γ) centré à l'origine du plan z ; l'adjectif canonique signifie simplement que z et Z sont équivalents à l'infini.

Sur (γ) nous poserons :

$$z = r e^{i\varphi},$$

r étant constant et bien déterminé. Posons :

$$(II.14) \quad F(Z) = i \log \frac{z}{r}.$$

On a sur (C) ou sur (γ) :

$$(II.15) \quad F'(Z) dZ = i \frac{dz}{z} = -i d\varphi = f(\theta) d\theta,$$

f étant réel; par conséquent :

$$\mathcal{R} \left[-i H \frac{dZ}{d\theta} \right] = \mathcal{R} \left[i H \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{1}{F'(Z)} \right] = \frac{d\varphi}{d\theta} \mathcal{R} \left[i \frac{H(Z)}{F'(Z)} \right],$$

et par suite (II.12) s'écrit :

$$(II.13) \quad \mathcal{R} \left[i \frac{H(Z)}{F'(Z)} \right] = 2 \frac{\rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi},$$

$H(Z)/F'(Z)$ est une fonction holomorphe à l'extérieur de (C) et régulière à l'infini. Nous avons donc, suivant un procédé classique, ramené le problème d'Hilbert à un problème de Dirichlet extérieur.

Soit $G(Z)$ la fonction holomorphe à l'extérieur de (C) , réelle à l'infini dont la partie réelle prend, sur (C) , les valeurs $\frac{2\rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi}$; $G(Z)$ est déterminé d'une façon unique. D'après (II.12) :

$$(II.17) \quad H(Z) = -i G(Z) F'(Z) + i \varepsilon F'(Z),$$

ε étant une constante réelle.

Mais nous avons vu (N° 2.1.2.3.) que le coefficient de $1/Z$, dans le développement de $H(Z)$ autour du point à l'infini (coefficient K_1) était réel; or, autour du point à l'infini :

$$i F(Z) = -\frac{1}{Z} + \frac{a_0}{Z^2} + \dots$$

Pour que le développement du second membre de la formule (II.17) admette un coefficient de $1/Z$ réel, il faut que $\varepsilon = 0$ puisque $G(Z)$ est réel à l'infini.

La solution cherchée est donc :

$$(II.18) \quad H(Z) = -i G(Z) F'(Z).$$

La fonction $H(Z)$ étant ainsi déterminée, les formules (II.3), (II.9), (II.11), permettent le calcul des vitesses complexes $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$, dans le cadre des approximations consenties. Le problème posé au numéro 2.1.1. se trouve donc ainsi résolu.

REMARQUES. —

1) Unicité de la solution. Il résulte des raisonnements précédents que la solution du problème d'Hilbert répondant à la condition (II.16) est unique. Ce résultat sera valable pour notre problème si l'on montre que toute fonction satisfaisant à la condition (II.16) est solution du problème initialement posé [condition (II.14)] ce qui est immédiat, car il suffit de remonter les calculs.

2) Calcul du coefficient K_1 . Le coefficient K_1 , d'après ce qui précède, est égal à la valeur (réelle) que prend $G(Z)$ à l'infini. Pour chercher $G(Z)$, nous pourrions résoudre le problème de Dirichlet dans le plan z ; d'après un résultat classique de l'étude des fonctions harmoniques, K_1 est égal à la valeur moyenne de $2\rho^2 \frac{d\theta}{d\varphi}$ sur le cercle (γ) . D'où :

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi\beta} \int_{(C)} \rho^2 d\theta = \frac{2S}{\pi\beta},$$

S représentant l'aire intérieure du contour (C).

2.2.- Applications.-

2.2.1.- REMARQUE GENERALE.-

Considérons un cône de sommet O dans l'espace (Ox_1, x_2, x_3) et dont l'image dans le plan Z est la courbe (C); définie par son équation polaire $\rho(\theta)$. D'après la définition de ρ (voir la remarque du numéro 1.2.5.), les sections de ce cône par des plans parallèles à $Ox_2 x_3$ sont homothétiques à la courbe:

$$(II.19) \quad x_2 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \theta, \quad x_3 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin \theta.$$

Dans le cas des approximations linéaires, $\overrightarrow{\text{grad } u}$, $\overrightarrow{\text{grad } v}$, $\overrightarrow{\text{grad } w}$ étant infiniment petits (il suffirait même qu'ils soient bornés), on voit que, dans le cadre des approximations du N° 2.1., on peut, sans inconvénient, simplifier les formules (II.19) et les écrire :

$$x_2 = 2\rho \cos \theta, \quad x_3 = 2\rho \sin \theta;$$

d'où le résultat, capital pour les applications :

La courbe (C) dans le plan Z, est homothétique aux sections du cône obstacle par des plans normaux à la vitesse non perturbée.

Considérons de même un cône à des incidences variables, mais petites, de manière que l'écoulement autour du cône soit toujours un écoulement répondant aux hypothèses de ce chapitre. On voit que, lorsque l'orientation du cône varie par rapport au vent, la courbe (C) dans le plan Z subit une translation.

2.2.2.- ETUDE D'UN CONE A INCIDENCE VARIABLE.-

Cette dernière remarque permet de prévoir que l'étude autour d'un cône étant faite pour une certaine orientation par rapport à la vitesse, tout le travail ne sera pas à refaire pour toute autre orientation. C'est ce que nous préciserons après avoir démontré le lemme suivant.

2.2.2.1.- LEMME : on peut écrire sur (C) que :

$$(II.20) \quad \frac{2\rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{\beta} \mathcal{R} \left[z \bar{z} \frac{dz}{dz} \right].$$

En effet posons :

$$Z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = X + i Y;$$

X et Y peuvent être considérés comme fonctions de φ .

On en déduit que :

$$\tan \theta = \frac{Y}{X}, \quad \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{Y' \varphi X - X' \varphi Y}{X^2} d\varphi,$$

et par suite :

$$\frac{2}{\beta} \rho^2 \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{\beta} (Y' \varphi X - X' \varphi Y) = -\frac{2}{\beta} \Re \left[-i \bar{Z} \frac{dZ}{d\varphi} \right] = \frac{2}{\beta} \Im \left[z \bar{Z} \frac{dZ}{dz} \right],$$

ce qui établit la formule (II.20).

2.2.2.2.- Considérons alors deux contours (C^0) et (C^1) définis dans le plan Z par deux fonctions $Z^{(0)}(\varphi)$ et $Z^{(1)}(\varphi)$ telles que :

$Z^{(0)} = Z^{(1)} + \alpha$, α étant une constante complexe fixant le changement d'orientation. Dans le développement (II.13) donnant la représentation conforme, seul le coefficient α_0 varie quand on passe du contour (C^0) au contour (C^1). Par suite :

$$z \frac{dZ^{(1)}}{dz} = z \frac{dZ^{(0)}}{dz},$$

et la condition de Dirichlet déterminant la fonction $G^{(1)}(z)$ s'écrit dans le plan z :

$$\Re \left[G^{(1)}(z) \right] = \frac{2}{\beta} \Re \left[\bar{Z}^{(1)} z \frac{dZ}{dz} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\Re \left[\bar{Z}^{(0)} z \frac{dZ}{dz} \right] + \Re \left[\bar{\alpha} z \frac{dZ}{dz} \right] \right];$$

(nous n'avons pas mis d'indice supérieur pour les quantités qui gardent la même valeur, affectées de l'indice 0 ou 1). Par suite :

$$G^{(1)}(z) = G^{(0)}(z) + \frac{2}{\beta} \left[g(z) \right];$$

$g(z)$ étant une fonction régulière et réelle à l'infini, holomorphe à l'extérieur de (γ) et dont la partie réelle sur (γ) prend les valeurs $\Re(\bar{\alpha} z dZ/dz)$, $g(z)$ se détermine alors très facilement. On a exactement :

$$g(z) = \bar{\alpha} z \left(\frac{dz}{dZ} - 1 \right) + \frac{\alpha r^2}{z}.$$

D'où, pour la fonction $H^{(1)}(z)$, (puisque $F'(Z) = i/z dz/dZ$) :

$$(II.21) \quad H^{(1)}(z) = H^{(0)}(z) + \frac{2}{\beta} \left[\bar{\alpha} \left(1 - \frac{dz}{dZ} \right) + \alpha \frac{r^2}{z^2} \frac{dz}{dZ} \right];$$

la formule (II.21) donne immédiatement la solution du problème du changement d'orientation par rapport au courant non perturbé.

2.2.3.- CONE DE REVOLUTION.-

Etudions, tout d'abord, le cas du cône à incidence nulle. On peut alors se passer de l'analyse précédente et obtenir la solution directement; c'est ce que nous ferons ici. La courbe (C) est un cercle de rayon $\rho = c^{te} = r$, la relation

(I.28) s'écrit :

$$v \cos \theta + w \sin \theta = \frac{2 r_0}{\beta (1 + r_0^2)} .$$

D'autre part, par raison de symétrie :

$$v \sin \theta - w \cos \theta = 0 .$$

On en déduit immédiatement les valeurs de v et w sur (C) :

$$v = \frac{2 r_0 \cos \theta}{\beta (1 + r_0^2)} , \quad w = \frac{2 r_0 \sin \theta}{\beta (1 + r_0^2)} ,$$

d'où :

$$(II.22) \quad V(Z) = \frac{2 r_0^2}{\beta (1 - r_0^4)} \left(\frac{1}{Z} - Z \right), \quad W(Z) = i \frac{2 r_0^2}{\beta (1 - r_0^4)} \left(\frac{1}{Z} + Z \right) .$$

Enfin les relations (I.25) permettent le calcul de U :

$$-\beta dU = -\frac{2 r_0^2}{\beta (1 - r_0^4)} \frac{2 Z}{Z^2 + 1} \left(\frac{1 + Z^2}{Z^2} \right) = -\frac{4}{\beta} \frac{r_0^2}{1 - r_0^4} \frac{1}{Z} ,$$

d'où :

$$(II.23) \quad U(Z) = \frac{4}{\beta^2} \frac{r_0^2}{1 - r_0^4} \log Z .$$

Étudions maintenant, en revenant à la méthode du N° 2.14, le cas d'un cône de révolution avec incidence.

La formule (II.13) s'écrit :

$$z = Z - a ,$$

a étant une constante que l'on peut supposer réelle.

Par suite :

$$F'(Z) = \frac{i}{Z - a} .$$

D'autre part, un calcul immédiat montre que :

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{r (r + a \cos \varphi)}{\rho^2} ,$$

et par suite :

$$\frac{2 \rho^2}{\beta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{\beta} (r^2 + a r \cos \varphi) ,$$

d'où :

$$G(Z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 + \frac{a r^2}{Z - a} \right) ;$$

d'après (II.18) :

$$H(Z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 + \frac{a r^2}{Z - a} \right) \frac{1}{Z - a} = 2 \frac{r^2}{\beta} \frac{Z}{(Z - a)^2} ,$$

le calcul s'achève facilement; on trouve :

(II.24)

$$V(Z) = \frac{2r^2}{\beta} Z \left[\frac{1}{(Z-a)^2} - 1 \right],$$

et :

(II.25)
$$U(Z) = 4 \frac{r^2}{\beta^2} \left[\log(Z-a) - \frac{3a}{Z-a} - \frac{a^2}{(Z-a)^2} + 4aZ \right],$$

puisque :

$$K_2 = + 4 a \frac{r^2}{\beta}.$$

En particulier, si $a = 0$, on trouve, par les formules approchées (II.24) et (II.25) le même résultat que par les formules (II.22) et (II.23), à condition de négliger, dans ces dernières; le terme en r_0^4 au dénominateur.

Pour donner à ces formules une forme directement applicable, il suffit de relier les quantités a , r , aux données géométriques, il faut pour cela reprendre la formule définissant ρ (page 30).

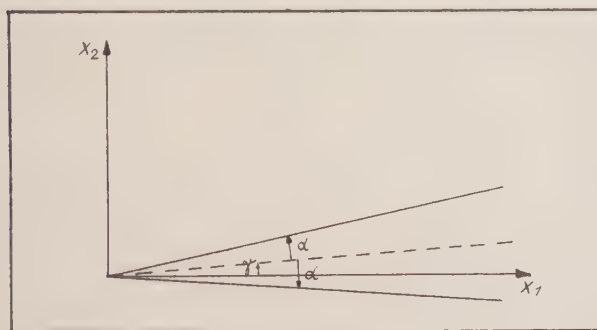


Fig. 11

La figure 11 représente la section du cône par le plan de symétrie aérodynamique : α est le demi-angle au sommet, γ désigne l'angle de l'axe du cône avec la vitesse non perturbée.

On a immédiatement :

$$2r = \beta \alpha, \quad 2a = \beta \gamma.$$

Enfin, nous utiliserons pour calculer C_p la formule (I.11), la composante u de la vitesse étant infiniment petite par rapport aux composantes v et w .

Elle s'écrit ici :

(II.26)
$$C_p = - 2 \mathcal{A} [U(Z)] - |V(Z)|^2;$$

d'après (II.24) et (II.25) on a :

(II.27)
$$C_p = 2 \alpha^2 \log \frac{2}{\beta \alpha} - \alpha^2 - \gamma^2 + 4 \alpha \gamma \cos \theta + 2 \gamma^2 \cos 2 \theta.$$

Le cas du cône de révolution à incidence nulle s'obtient en faisant $\gamma = 0$. On retrouve alors un résultat connu. La formule (II.27) a déjà été donnée par BUSEMANN (voir ref.9) sans démonstration.

2.2.4.- CONE ELLIPTIQUE.-

Nous nous placerons tout d'abord dans l'hypothèse la plus simple où les plans Ox_1x_2 , Ox_1x_3 sont des plans de symétrie de l'écoulement ($\vec{U}$ est dirigé suivant l'axe du cône), le cône étant aplati sur Ox_1x_2 . La formule (II.13) peut s'écrire sous la forme :

$$Z = z + \frac{a^2}{z},$$

ou :

$$\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \varphi .$$

On en déduit successivement :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2} \operatorname{tg} \varphi ,$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \varphi} \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2} = \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \frac{1}{\rho^2} ,$$

et :

$$\frac{2}{\beta} \rho^2 \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) .$$

Le problème de Dirichlet, permettant le calcul de $G(Z)$, est immédiat; puis-que $G(Z)$ a une partie réelle constante sur le contour (C), $G(Z)$ est constant :

$$\frac{dZ}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2} , \quad F'(Z) = i \frac{1}{z \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)} ,$$

d'où :

$$H(Z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \frac{1}{z - \frac{a^2}{z}} ,$$

et :

$$H(Z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \frac{1}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}} ;$$

remarquons d'ailleurs que $K_2 = 0$.On calcule $V(Z)$ par la formule (II.9) :

$$(II.28) \quad V(Z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}} - Z \right) ,$$

et $U(Z)$, par la formule (II.11) que l'on peut aussi écrire :

$$(II.29) \quad U(Z) = -\frac{2}{\beta} \left[ZH - K_1 - \int G \frac{dz}{z} - 2 \bar{K}_2 Z \right] ,$$

d'où :

$$U(Z) = \frac{4}{\beta^2} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \left(\log z - \frac{2a^2}{z^2 - a^2} \right) ,$$

soit :

$$(II.30) \quad U(Z) = \frac{4}{\beta^2} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \left[\log \frac{Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2}}{2} + \frac{\sqrt{Z^2 - 4a^2} - Z}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}} \right] .$$

Si l'on fait $a = 0$, on retrouve bien les expressions déjà obtenues pour $U(Z)$ et $V(Z)$, dans le cas d'un cône de révolution à incidence nulle (formules (II.24) et (II.25) dans lesquelles on fait $a = 0$).

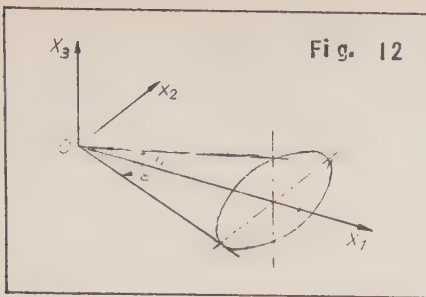


Fig. 12

Désignons par ϵ et par η les angles principaux du cône elliptique (voir fig. 12). On a :

$$\epsilon \beta = 2 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) ,$$

$$\eta \beta = 2 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) ,$$

$$\text{d'où: } r = \frac{\beta}{4} (\epsilon + \eta) , \quad a^2 = \frac{\beta^2}{16} (\epsilon^2 - \eta^2) .$$

Il est facile de calculer la répartition de pression sur le pourtour du cône. Il suffit d'appliquer la formule (II.26); d'ailleurs :

$$\left| V(Z) \right|^2 = \frac{\epsilon^2 \eta^2}{\eta^2 \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \sin^2 \varphi} ,$$

et :

$$\mathcal{R} [U(Z)] = \epsilon \eta \left[\log \left| \frac{\beta (\epsilon + \eta)}{4} \right| + 1 \right] - \frac{\epsilon^2 \eta^2}{\eta^2 \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \sin^2 \varphi} ;$$

d'où la formule finale :

$$(II.31) \quad C_p = 2 \epsilon \eta \left[-\log \left| \frac{\beta (\epsilon + \eta)}{4} \right| - 1 + \frac{\epsilon \eta}{2 (\eta^2 \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \sin^2 \varphi)} \right] .$$

Le cas où la vitesse n'est pas dirigée suivant l'axe peut se traiter également en utilisant la formule (II.21). Dans cette formule, il faut faire :

$$H^0(z) = \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \frac{1}{z - \frac{a^2}{z}} , \quad \frac{dZ}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2} ;$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} H^{(1)}(z) &= \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \frac{z}{z^2 - a^2} + \frac{2}{\beta} \left[\bar{\alpha} \left(1 - \frac{z^2}{z^2 - a^2} \right) + \frac{\alpha r^2}{z^2} \frac{z^2}{z^2 - a^2} \right] \\ &= \frac{2}{\beta (z^2 - a^2)} \left[\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) z + \alpha r^2 - \bar{\alpha} a^2 \right] ; \end{aligned}$$

d'où, en remarquant que :

$$Z = z + \frac{a^2}{z} + \alpha ,$$

$$H(Z) = \frac{2}{\beta} \left[\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(Z-\alpha)^2 - 4a^2}} \right) + \frac{(\alpha r^2 - \bar{\alpha} a^2) (Z - \alpha - \sqrt{(Z-\alpha)^2 - 4a^2})}{2a^2 \sqrt{(Z-\alpha)^2 - 4a^2}} \right] ,$$

et :

$$V(Z) = H(Z) - \frac{2}{\beta} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) Z .$$

D'autre part, nous ferons le calcul de U , en utilisant la variable z et la formule (II.20). Le coefficient K_2 est égal à :

$$K_2 = \frac{2}{\beta} \left[\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \alpha + \alpha r^2 - \bar{\alpha} a^2 \right] ,$$

et $U(z)$ est alors donné par la formule :

$$(II.32) \quad U(z) = \frac{4}{\beta^2} \left[\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \left(\log z - \frac{2a^2 + \alpha z}{z^2 - a^2} \right) + \frac{\bar{\alpha} a^2 - \alpha r^2}{z(z^2 - a^2)} (2z^2 + \alpha z) \right] + 4 \frac{\bar{K}_2}{\beta} z .$$

On remarquera que, si on fait $\alpha = 0$, on retrouve la formule (II.30); et que pour $\bar{\alpha} = 0$, on retrouve la formule (II.25), aux notations près.

On peut donc, sans aucune difficulté autre que la longueur d'écriture, calculer la répartition du coefficient de pression sur le cône elliptique ayant une orientation quelconque par rapport au vent.

2.2.5.- CALCUL DES EFFORTS GLOBAUX.-

Nous avons déjà vu, au paragraphe 1.2.6., que la normale au cône obstacle dirigée vers l'extérieur, a pour paramètres directeurs :

$$\frac{1}{\beta} (x_3 x'_2 - x_2 x'_3) , x'_3 , -x'_2 .$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur unité porté sur cette normale, s.l'aire de la section d'abscisse x_1 , L la longueur de cette section; on peut faire correspondre à la résultante des forces s'exerçant sur une tranche $(x_1, x_1 + dx_1)$ un vecteur (sans dimension) :

$$(II.33) \quad \vec{C}_z = -\frac{1}{L} \int C_p \vec{n} ds ,$$

situé dans le plan $x_2 x_3$, et un nombre sans dimension :

$$(II.34) \quad C_x = -\frac{1}{L} \int C_p (\vec{n}U) ds ;$$

le vecteur $\vec{C}_z$ caractérise la portance, le nombre C_x la résistance.

Les intégrales figurant dans les formules (33) et (34) sont prises le long de la section. Naturellement $\vec{C}_z$ et C_x sont indépendants de cette section. On peut aussi bien remplacer $\vec{C}_z$ par un nombre complexe C_z dont les parties réelles et imaginaires sont égales aux composantes du vecteur $\vec{C}_z$ sur Ox_2 et Ox_3 . Pour calculer (II.33) et (II.34) on peut utiliser la section $x_1 = \beta$. Soit l la longueur du contour (C) dans le plan Z , on peut alors écrire, compte tenu des approximations habituelles :

$$(II.35) \quad C_z = \frac{1}{l} \int_C C_p dZ ,$$

et :

$$(II.36) \quad C_x = -\frac{2}{\beta l} \Re \left[i \int_C C_p \bar{Z} dZ \right] ,$$

les intégrales figurant dans (II.35) et (II.36) étant prises dans le plan Z . Ces intégrales présentent une certaine analogie avec les intégrales de Blasius (ref. 13); C_p est donné par la formule (II.26); malheureusement, il n'est pas possible de donner des formules simples pour les efforts globaux, car les intégrales (II.35) et (II.36) font intervenir tous les coefficients de la représentation conforme ⁽¹⁾.

Appliquons les formules (II.35) et (II.36) au cas du cône circulaire, C_p est donné par (II.27) :

$$dZ = i \frac{\beta \alpha}{2} e^{i\theta} d\theta, \quad \bar{Z} dZ = i \frac{\beta^2 \alpha^2}{4} d\theta, \quad l = \pi \beta \alpha;$$

il vient :

$$(II.37) \quad C_z = -2 \alpha \gamma, \quad C_x = 2 \alpha^3 \log \frac{2}{\beta \alpha} - \alpha^3 - \alpha \gamma^2.$$

Dans le cas du cône elliptique à incidence nulle, C_z est évidemment nul :

$$\bar{Z} = r e^{-i\varphi} + \frac{a^2}{r} e^{i\varphi}, \quad dZ = i \left[r e^{i\varphi} - \frac{a^2}{r} e^{-i\varphi} \right] d\varphi,$$

d'où :

$$C_x = \frac{2}{\beta l} \left(r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \int_0^{2\pi} C_p d\varphi,$$

C_p étant donné par la formule (II.31).

Or :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon \eta d\varphi}{2 (\eta^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \eta dt}{\eta^2 + \varepsilon^2 t^2}.$$

Comme on le voit immédiatement en posant :

$$t = \operatorname{tg} \varphi,$$

le calcul de cette dernière intégrale est immédiat.

On obtient donc :

$$(II.38) \quad C_x = \frac{2 \pi \beta}{l} \varepsilon^2 \eta^2 \left[\log \frac{4}{\beta (\varepsilon + \eta)} - \frac{1}{2} \right],$$

l étant la longueur de l'ellipse, de demi-axes $\frac{\varepsilon \beta}{2}$, $\frac{\eta \beta}{2}$.

2.2.6. - FORMULE APPROCHÉE POUR LE CALCUL DU C_x -

Considérons la fonction $U(z)$; d'après la formule (II.11) et la remarque 2 du N° 2.1.4. on peut dire que le terme principal pour $U(z)$ est :

(1) Voir Annexe n° 7

$$U(z) = 4 \frac{S}{\pi \beta^2} \log z .$$

Par suite, en première approximation :

$$C_p = - \frac{8 S}{\pi \beta^2} \log r ,$$

S étant l'aire intérieure du contour (C) , r le rayon du cercle (γ) sur lequel on fait la représentation conforme canonique de (C) . Si maintenant on calcule le C_x en tenant compte de cette formule approchée, on a d'après (II.36) :

$$C_x = - \frac{18 S}{\pi \beta^3 l} \log r \Re \left[i \int_c \bar{Z} dZ \right] ;$$

d'où :

$$(II.39) \quad C_x = + \frac{32 S^2}{\pi \beta^3 l} \log \frac{1}{r} .$$

Nous énonçons : *En toute première approximation, la valeur du coefficient de traînée C_x , est donnée par la formule (II.39).*

2.2.7. - CAS OU LE CONE PRESENTE UNE GENERATRICE SAILLANTE. -

Si le contour (C) présente un point anguleux saillant, les diverses fonctions que nous avons introduites au cours de l'étude du premier paragraphe du présent chapitre, présentent certaines singularités. Ce sont ces singularités que nous allons préciser. Soit Z_0 , l'affixe d'un point anguleux de (C) et $\delta \pi$ l'angle des deux demi-tangentes à (C) au point Z_0 ($0 < \delta < 1$) (voir fig. 13); d'après un résultat bien connu, si z_0 est l'image dans le plan z du point Z_0 , on peut écrire, au voisinage de z_0 :

$$\left(\frac{dZ}{dz} \right) = K (z - z_0)^k ,$$

K étant une constante complexe et $k = 1 - \delta$; par suite:

$$\left[F'(Z) \right]_0 = K_1 (z - z_0)^{-k} = K_2 (Z - Z_0)^{-\frac{k}{1+k}} ,$$

K_1 et K_2 étant des constantes complexes. $F'(Z)$ devient donc infini au point $Z = Z_0$.

Par contre la fonction $G(z)$, par définition, a une partie réelle qui prend sur le cercle (γ) les valeurs :

$$\frac{2}{\beta} \Re \left[z \bar{Z} \frac{dZ}{dz} \right] .$$

Cette partie réelle reste donc finie sur le cercle (γ) ; (et elle y satisfait à une condition de Hölder). D'après un théorème connu, sa partie imaginaire reste également continue sur (γ) (et satisfait également à une condition de Hölder). Par conséquent, si on se reporte à la formule (II.18) on voit que :

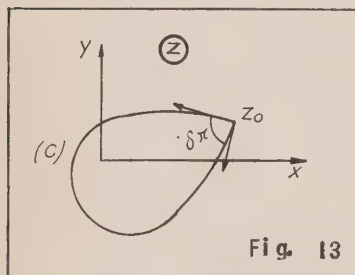


Fig. 13

$$H(Z) = K_3 (Z - Z_0)^{-\frac{k}{1+k}}$$

au voisinage de Z_0 ; de même U, V, W seront, aux environs de ce point, d'ordre $\frac{k}{1+k}$ par rapport à $\frac{1}{Z - Z_0}$.

L'analyse faite au N° 2.1. ne s'applique donc plus à ce cas. Toutefois, les formules (II.35) et (II.36) montrent que, si le coefficient de pression prend des valeurs très grandes au voisinage de $Z = Z_0$, les efforts globaux restent finis. Conformément à ce que nous avons indiqué au N° 1.1.3. nous considérons encore la solution comme valable, étant entendu qu'il ne faudra pas se fier aux valeurs du C_p aux environs de $Z = Z_0$.

2.2.8. — AILE DELTA (Δ) DE FAIBLE OUVERTURE, PRESENTANT UNE INCIDENCE INFINIMENT PETITE. —

Si dans les formules de la fin du N° 2.2.4, on fait $r^2 = a^2$, on obtient la répartition de pression sur une aile Δ , de faible ouverture. Une aile Δ , rappelons-le, est un angle infiniment mince. Son ouverture, par définition, est le demi-angle ω à la pointe (voir fig. 14). On a donc :

$$\omega \beta = 4 a \quad .$$

On peut appliquer les formules (II.31) et (II.32) à l'aile Δ de faible ouverture placée à une incidence également assez faible.

Supposons de plus cette ouverture infiniment petite par rapport à l'incidence. Dans ces conditions, les formules donnant $U(Z)$ et $V(Z)$ s'écrivent :

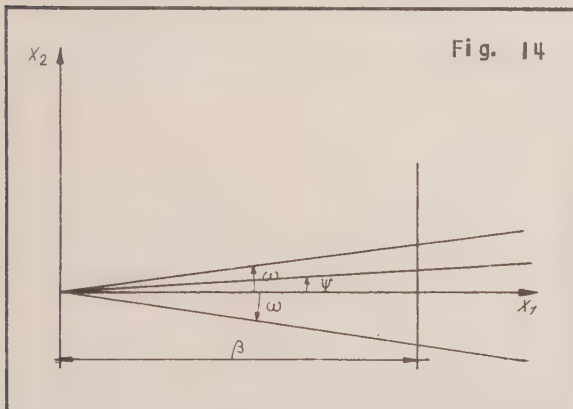
$$(II.40) \quad \begin{aligned} V(Z) &= \frac{2}{\beta^2} \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2} \frac{Z - \sqrt{Z^2 - 4a^2}}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}} \quad , \\ U(Z) &= -\frac{4}{\beta^2} \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2} \frac{4a^2}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}} + \frac{3a^2}{\beta^2} (\bar{\alpha} - \alpha) Z \quad . \end{aligned}$$

On s'autorise, en effet, à supprimer les termes du second ordre par rapport à α . Pour calculer C_p , on peut se contenter d'appliquer la formule (II.8) et négliger le deuxième terme de la deuxième formule (II.40).

Soit γ l'incidence, le Δ étant parallèle à Ox_2 , on a :

$$\gamma \beta = 2 i \alpha \quad .$$

Enfin, on peut poser le long du Δ :



$$Z = 2a \cos \varphi = \frac{\omega \beta}{2} \cos \varphi .$$

On trouve alors :

$$(II.41) \quad C_p = \frac{2 \omega \gamma}{\sin \varphi} .$$

Remarquons encore que φ est lié à l'angle ψ de la figure 14 par :

$$2 \psi \beta = \omega \beta \cos \varphi, \quad \psi = \frac{\omega \cos \varphi}{2} .$$

On peut énoncer : le coefficient de pression sur un Δ infiniment peu ouvert est indépendant du nombre de Mach de l'écoulement.

On a :

$$C_p = \frac{2 \omega \gamma}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{si} \quad t = \frac{2 \psi}{\omega} ;$$

si on applique la formule (II.35) on trouve :

$$C_z = i \pi \omega \gamma .$$

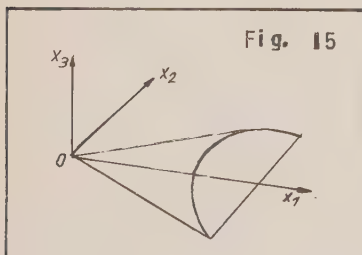
Ce coefficient C_z n'a pas la même signification que celui qu'on utilise dans la théorie de l'aile portante. En effet, il est relatif, d'après la manière même dont il a été obtenu, à l'aire totale du Δ (côté intrados et extrados); si on ne tient compte que d'une seule de ces aires, il faudra écrire (en négligeant le facteur $-i$)

$$C_z = 2 \pi \omega \gamma .$$

Cette formule a été trouvée par d'autres procédés, par R.T. JONES (ref.14). Nous la retrouverons au chapitre III (N° 3.1.2.4.) lorsque nous étudierons le problème général de l'aile Δ qui n'est abordé ici que incidemment et pour le cas particulier d'un Δ infiniment peu ouvert.

2.2.9.-- ETUDE D'UN CONE A SECTION SEMI-CIRCULAIRE.--

Comme dernière application, nous traiterons le cas d'un cône, à section semi-circulaire, la vitesse $\vec{U}$ étant dirigée suivant l'intersection du plan de symétrie et de la face plane du cône ⁽¹⁾ (fig.15).



(II.42)

Le contour (C) dans le plan Z est alors un demi-cercle, centré à l'origine, de rayon a (fig.16).

On obtient très facilement la représentation conforme canonique de l'extérieur de ce contour, sur l'extérieur d'un cercle (γ) de rayon r , centré à l'origine du plan z , par une transformation de Karman-Trefftz particulière (ref.13 p.128) qui s'écrit :

$$\frac{Z - a}{Z + a} = \left[\frac{z - r e^{-i \frac{\pi}{6}}}{z - r e^{-i \frac{5\pi}{6}}} \right]^{\frac{3}{2}} ;$$

(voir renvoi (1) page 41)

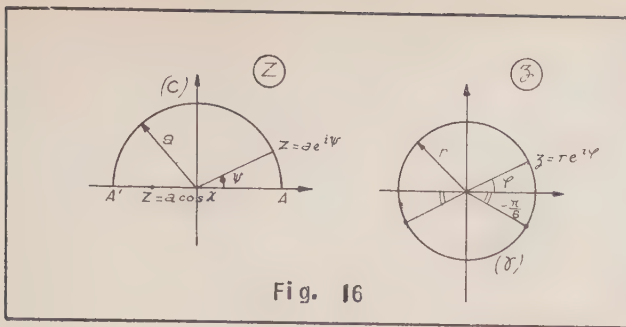


Fig. 16

a et r sont liés par la relation :

$$4 a = 3 r \sqrt{3} .$$

Pour obtenir la correspondance entre le cercle (γ) et le contour (C) il faut distinguer deux cas. Posons :

$$z = r e^{i \varphi} .$$

$$1) -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{6} , \text{ le point cor-}$$

respondant de (C) est sur l'arc de cercle.

Posons dans ces conditions :

$$Z = a e^{i \psi} ,$$

on trouve d'après la formule (II.42) :

$$(II.43) \quad \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \left[\frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{12} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5\pi}{12} \right)} \right]^{\frac{3}{2}} .$$

$$2) \quad \frac{7\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{6} , \text{ le point correspondant de } (C) \text{ est sur le segment } AA' ;$$

posons dans ces conditions :

$$Z = a \cos \chi .$$

La formule (II.42) montre que :

$$(II.44) \quad \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \left[\frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{12} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5\pi}{12} \right)} \right]^{\frac{3}{4}} .$$

Les deux dernières formules définissent complètement la représentation conforme cherchée. Les figures (17) et (18) donnent les variations de ψ et χ en fonction de φ .

Nous aurons à utiliser également la valeur de dz/dZ . Pour l'obtenir, la méthode la plus simple consiste à différencier logarithmiquement les deux membres de la formule (II.42). On obtient alors le résultat :

$$(II.45) \quad \frac{dz}{dZ} = \frac{z^2 + i r z - r^2}{Z^2 - r^2} .$$

Si on a : $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{6}$, il faut poser dans la formule précédente :

$$z = r e^{i \varphi} , \quad Z = a e^{i \psi} ,$$

...

(1) Un tel cône formait la pointe avant de maquettes supersoniques projetées par des ingénieurs allemands.

Fig. 17

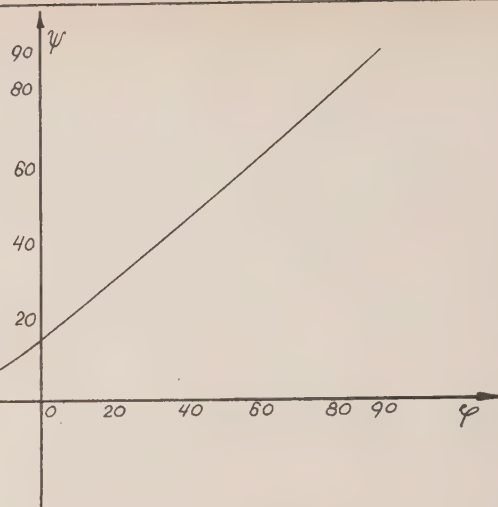
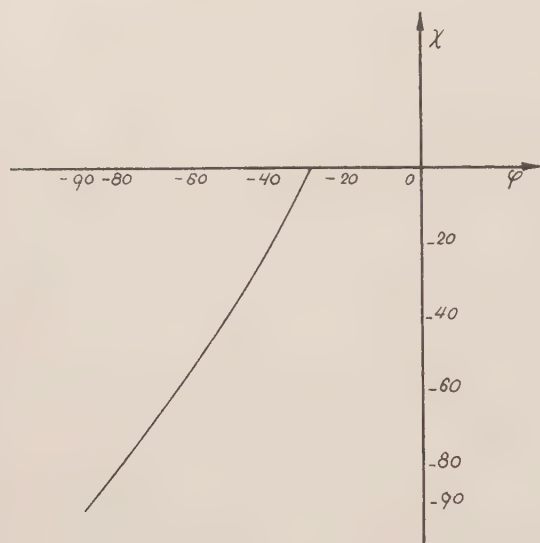


Fig. 18

d'où :

$$(II.46) \quad \frac{dz}{dZ} = \frac{r^2}{2a^2} \frac{1+2\sin\varphi}{\sin\psi} e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{8}{27} \frac{1+2\sin\varphi}{\sin\psi} e^{i(\varphi-\psi)}.$$

Si φ est compris entre $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$, on pose $z = re^{i\varphi}$, $Z = a \cos \chi$, on obtient alors :

$$(II.47) \quad \frac{dz}{dZ} = \frac{16}{27} \frac{1+2\sin\varphi}{\sin^2\chi} e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)}.$$

La fonction $G(Z)$ a pour partie réelle, $\Re \left[z \bar{z} \frac{dZ}{dz} \right]$,

c'est-à-dire :

$$(II.48) \quad \begin{cases} \frac{27}{8} ar \frac{\sin\psi}{1+2\sin\varphi} & \text{si } -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{6}, \\ 0 & \text{si } \frac{7\pi}{6} < \varphi < \frac{11\pi}{6}. \end{cases}$$

La fonction analytique :

$$a^2 \frac{z}{Z} \frac{dZ}{dz}$$

a une partie réelle qui, sur (γ) , prend ces mêmes valeurs. Cette fonction est régulière à l'infini, holomorphe à l'extérieur de (γ) , mais à un pôle $z = -ir$, le résidu correspondant étant égal à $-i a^2$.

Considérons alors la fonction :

$$a^2 \left(\frac{z}{Z} \frac{dZ}{dz} - \frac{1}{2} \frac{z - ir}{z + ir} \right) .$$

Cette fonction est holomorphe à l'extérieur de (γ) . Elle est régulière à l'infini, sa valeur à l'infini étant égale à $a^2/2$. Sur (γ) , les parties réelles et imaginaires satisfont à des conditions de Hölder. Cette fonction est donc identique à la fonction $G(z)$ cherchée.

On en déduit d'après (II.18) :

$$H(Z) = \left(\frac{z}{Z} \frac{dZ}{dz} - \frac{1}{2} \frac{z - ir}{z + ir} \right) \frac{a^2 dz}{z dZ} = \frac{a^2}{Z} - \frac{a^2}{2z} \frac{z - ir}{z + ir} \frac{dz}{dZ} ,$$

et d'après (II.19) :

$$V(Z) = a^2 \left(\frac{1}{Z} - \frac{Z}{2} - \frac{1}{2z} \frac{z - ir}{z + ir} \frac{dz}{dZ} \right) .$$

Enfin, le calcul de $U(Z)$ pourra se faire à l'aide de la formule (II.29) :

$$\int G \frac{dz}{z} = a^2 \log Z - \frac{a^2}{2} \int \frac{z - ir}{z + ir} \frac{dz}{z} = a^2 \left(\log \frac{Z}{z + ir} + \frac{1}{2} \log z \right) ,$$

et :

$$ZH - K_1 = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Z}{z} \frac{dz}{dZ} \frac{z - ir}{z + ir} - \frac{1}{2} \right) = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{z - ir}{z + ir} \frac{Z}{z} \frac{dz}{dZ} \right) ,$$

d'où :

$$U(Z) = \frac{a^2}{\beta} \left(\frac{z - ir}{z + ir} \frac{Z}{z} \frac{dz}{dZ} - 1 + \frac{4 \bar{K}_2 Z}{a^2} + 2 \log \frac{Z}{z + ir} + \log z \right) .$$

Le calcul du coefficient $\bar{K}_2$ ne fait aucune difficulté; mais, comme on a déjà pu le remarquer, le terme en $\bar{K}_2 Z$ n'intervient pas pour le calcul des pressions le long du cône.

Cette répartition des pressions le long du cône calculée à l'aide de (II.26) est représentée à la figure 19, page 44.

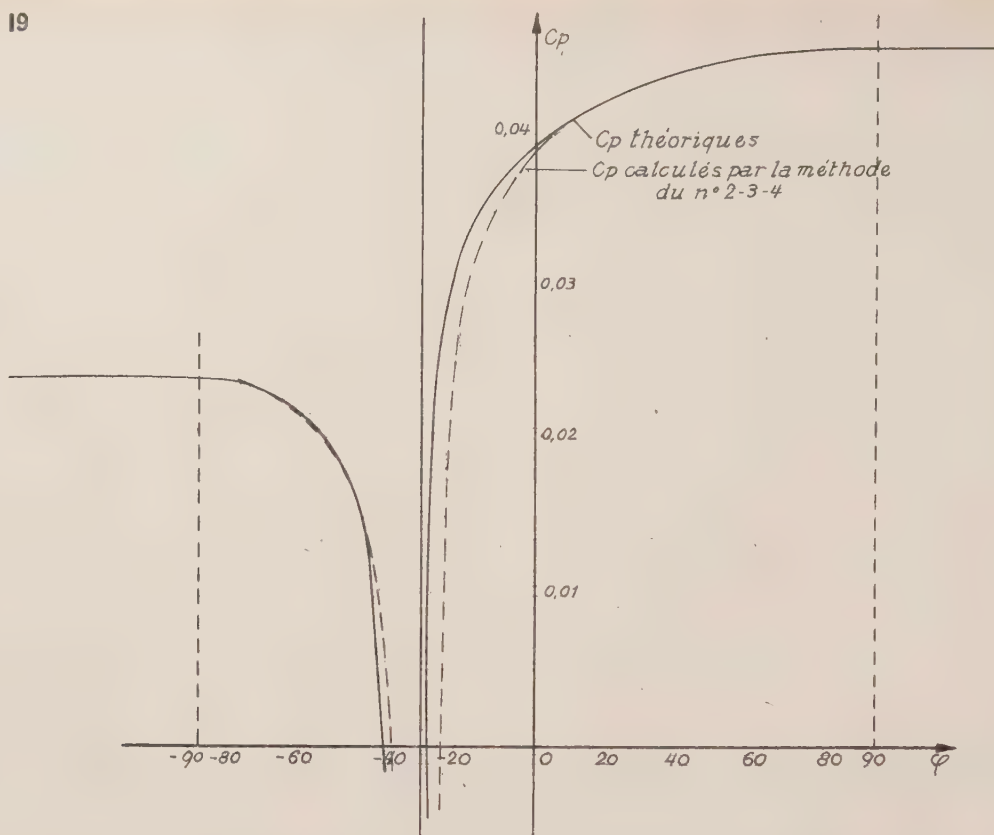
2.3.- Calcul numérique des écoulements coniques infiniment peu ouverts,-

2.3.1.- REMARQUES GENERALES.-

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié un certain nombre de cas particulièrement simples. Mais si le cône (C) est quelconque, il faudra effectuer les diverses opérations conduisant à la solution par des procédés purement numériques.

Analysons les diverses opérations nécessaires pour le calcul :

Fig. 19



1) Il faut effectuer la représentation conforme canonique de l'extérieur de (C) sur l'extérieur du cercle (γ); ce calcul comporte, en particulier, la détermination du rayon r de (γ), la correspondance des points de (C) et de (γ), le calcul de l'expression dZ sur le contour (γ).

2) Il faut déterminer la fonction $G(z)$, holomorphe à l'extérieur de (γ), régulière et réelle à l'infini, dont on connaît la partie réelle sur (γ) que nous noterons $g(\varphi)$. En fait, il suffit seulement de connaître, sur (γ), la partie imaginaire de $G(z)$, soit $g'(\varphi)$; $g'(\varphi)$ est la fonction conjuguée de $g(\varphi)$, elle est donnée par la formule :

$$g'(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi') \cotg \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' ,$$

formule appelée "intégrale de Poisson".

3) Ces deux opérations faites, on connaît les valeurs de $H(z)$ sur le cercle (γ) [formule (II.18)], ce qui fournit les valeurs de v et w sur le cône; u s'obtient par la formule (II.29), le seul nouveau calcul à faire est celui de l'expression:

$$\mathcal{R} \left[- \int G \frac{dz}{z} \right] = \int g' d\varphi ,$$

la constante d'intégration étant déterminée pour que u ait une valeur moyenne nulle sur (γ).

L'ensemble de ces opérations se ramène toujours aux problèmes numériques suivants :

- a) Etant donnée une fonction, calculer sa fonction conjuguée (intégrale de Poisson).
- b) Etant donnée une fonction, calculer la dérivée de la fonction conjuguée.
- c) Etant donnée une fonction, calculer sa dérivée ⁽¹⁾.

Nous allons justifier ce résultat au numéro suivant en montrant que l'opération 1) peut s'effectuer en appliquant les calculs a), b), c). Nous indiquerons ensuite une méthode générale, relativement simple et précise, permettant de résoudre ces problèmes. Nous terminerons ce chapitre en donnant une application.

2.3.2. — REPRESENTATION CONFORME CANONIQUE D'UN CONTOUR (C) SUR UN CERCLE (Y)

Le problème numérique de la détermination de la représentation conforme canonique d'un contour (C) sur un cercle (Y) a été résolu, pour la première fois, par Théodorsen ⁽²⁾. Nous allons rappeler rapidement le principe de cette méthode en simplifiant toutefois l'exposé initial de cet auteur.

Supposons, tout d'abord, que le contour (C) soit voisin d'un cercle de rayon a , centré à l'origine (fig. 20); d'une façon plus précise si on pose sur (C) :

$$(II.49) \quad Z = a e^{\psi + i\vartheta},$$

ψ étant une fonction de θ , $\psi = \psi(\theta)$, nous supposons que $\psi(\theta)$ et $\frac{d\psi}{d\theta}$ sont

des fonctions prenant des valeurs petites. Nous dirons alors que (C) est "quasi-circulaire". Soit φ l'abscisse angulaire du point de (Y) correspon-

dant au point de (C) dont l'angle polaire est θ ; posons :

$$(II.50) \quad \theta = \varphi + \varepsilon(\varphi), \quad \varphi = \theta - \varepsilon(\theta),$$

$\varepsilon(\theta)$ et $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ représentant la même fonction, mais exprimée en fonction de θ ou en fonction de φ ; on posera de même :

$$\bar{\psi}(\varphi) = \psi(\theta).$$

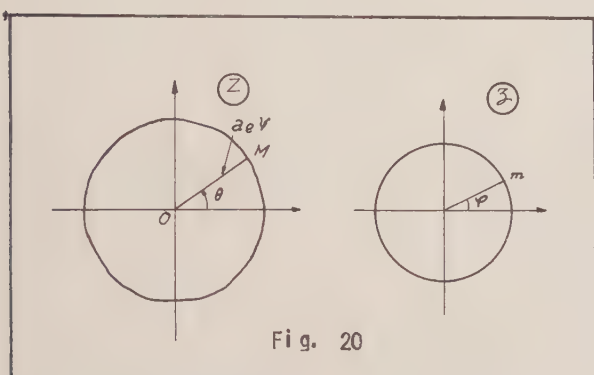


Fig. 20

(1) Naturellement si l'on connaît la représentation conforme, de l'extérieur de (C) sur l'extérieur de (Y), sous forme explicite, il suffira d'appliquer l'opération a).

(2) Voir ref. N° 15 et 16. On peut aussi effectuer cette représentation conforme par l'élégant procédé des analogies électriques (ref. N° 17), le temps demandé par la méthode expérimentale et les méthodes purement numériques exposées ici et la précision de ces procédés sont du même ordre de grandeur.

La transformation conforme cherchée peut s'écrire :

$$Z = z e^{h(z)}$$

$h(z)$ étant une fonction holomorphe à l'extérieur de (γ) , régulière et nulle à l'infini. L'égalité (II.50), si on l'écrit sur le cercle (γ) devient :

$$a e^{\bar{\psi}(\varphi) + i [\varphi + \bar{\varepsilon}(\varphi)]} = r e^{i\varphi} e^{h(z)}$$

d'où :

$$(II.51) \quad h(z) = \frac{a}{r} \bar{\psi}'(\varphi) + i \bar{\varepsilon}'(\varphi) + \log \frac{a}{r}$$

Trouver la représentation conforme de (C) sur (φ) revient à calculer les fonctions $\bar{\psi}(\varphi)$ et $\bar{\varepsilon}(\varphi)$. Or, tout d'abord on sait que [équation de (C)] :

$$(II.52) \quad \bar{\psi}(\varphi) = \psi[\varphi + \bar{\varepsilon}(\varphi)] ;$$

d'autre part, d'après (II.51), $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ est la fonction conjuguée de $\bar{\psi}(\varphi)$ et par conséquent :

$$(II.53) \quad \bar{\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(\varphi') \cotg\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right) d\varphi' ,$$

l'intégrale étant prise en valeur principale. Il n'y a pas de constante à ajouter au second membre de (II.53), car $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ a une valeur moyenne nulle puisque $h(z)$ est nulle à l'infini. Pour la même raison, si $\bar{\psi}_0$ désigne la valeur moyenne de $\bar{\psi}(\varphi)$ dans un intervalle d'amplitude 2π :

$$(II.54) \quad r = a e^{\bar{\psi}_0} ,$$

égalité qui permettra le calcul de r quand on connaîtra $\bar{\psi}(\varphi)$. Pour calculer $\bar{\varepsilon}(\varphi)$ et $\bar{\psi}(\varphi)$, on dispose donc des relations (II.52) et (II.53); on peut résoudre ce système par un procédé d'approximations successives.

Posons d'abord :

$$\varepsilon_0(\theta) = \bar{\varepsilon}_0(\varphi) = 0 ;$$

d'après (II.52) :

$$\bar{\psi}(\theta) = \psi(\theta) ,$$

et d'après (II.53) :

$$\varepsilon_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta') \cotg \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' .$$

D'où une première approximation pour φ :

$$\varphi_1 = \theta - \varepsilon_1(\theta) , \quad \theta = \varphi_1 + \bar{\varepsilon}_1(\varphi_1) ;$$

on en déduit, d'après (II.52), une première approximation pour $\bar{\psi}(\varphi)$:

$$\bar{\psi}_1(\varphi_1) = \psi[\varphi_1 + \bar{\varepsilon}_1(\varphi_1)] ,$$

d'où une seconde approximation pour la fonction ε :

$$\varepsilon_2(\varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}_1(\varphi_1') \cotg \frac{\varphi_1' - \varphi_1}{2} d\varphi_1' ,$$

$$\varepsilon_2(\theta) = \varepsilon_2[\theta - \varepsilon_1(\theta)] ,$$

d'où :

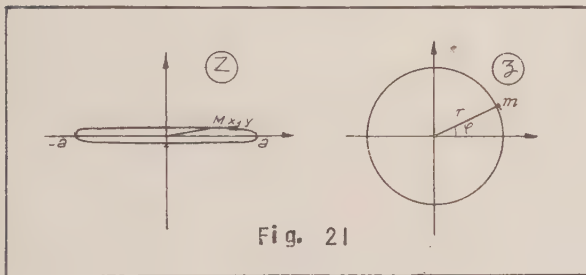
$$\varphi_2 = \theta - \varepsilon_2(\theta) , \quad \theta = \varphi_2 + \bar{\varepsilon}_2(\varphi_2);$$

le procédé peut se poursuivre indéfiniment.

La convergence des approximations successives fait l'objet d'un mémoire de S.E. WARSCHAWSKI (ref.18). Nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir cette question à ce très joli travail.

Du point de vue pratique, on peut dire que la convergence est très rapide deux approximations suffisent très largement dans la plupart des cas, les différents changements de variables qui alourdissent l'exposé précédent se font très facilement par voie graphique. On voit donc que l'essentiel du travail numérique consiste à calculer deux fois l'intégrale (II.53). Ce calcul est précisément l'objet du problème a) énoncé à la fin du N° 2.3.1.

Si le contour (C) n'est pas "quasi circulaire" on peut faire, tout d'abord une représentation conforme qui le transforme en un contour (C') "quasi circulaire"; on appliquera alors l'analyse précédente au contour (C'). Dans certains cas, il sera plus rapide d'appliquer une méthode directe. Supposons, par exemple, que (C) soit un contour aplati sur l'axe des X (voir fig.21) et pour simplifier qu'il admette X'OX comme axe de symétrie.



Supposons que, le long de (C), X varié de $-a$ à $+a$, tandis que $|Y|$ reste borné par ma (m étant par exemple de l'ordre de $1/10$), il sera alors indiqué d'opérer comme suit :

Posons le long de (C) :

$$Z = \frac{z}{r} \left[f(\varphi) + i g(\varphi) \right] ,$$

on a :

$$(II.55) \quad \begin{cases} X(\varphi) = f \cos \varphi - g \sin \varphi \\ Y(\varphi) = f \sin \varphi + g \cos \varphi , \end{cases}$$

ou encore :

$$(II.56) \quad \begin{cases} f = X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ g = Y \cos \varphi - X \sin \varphi ; \end{cases}$$

$f(\varphi)$ est une fonction paire de φ , $g(\varphi)$ une fonction impaire :

$$f(0) = + f(\pi) = a , \quad g(0) = g(\pi) = 0 ,$$

Il s'agit de trouver les fonctions $X(\varphi)$ et $Y(\varphi)$. Prenons comme point de départ :

$$X_0(\varphi) = a \cos \varphi ,$$

approximation qui serait définitive si (C) était une ellipse.

Sur le contour (C) on lit la valeur correspondante $Y_0(\varphi)$ et, par la deuxième formule (II.53.) on obtient une première approximation :

$$g_1(\varphi) = Y_0(\varphi) \cos \varphi - X_0(\varphi) \sin \varphi ;$$

$f_1(\varphi)$ sera donné par une intégrale de Poisson :

$$f_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi') \cotg \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' + \lambda_1 ,$$

λ_1 étant une constante, telle que $f_1(0) = a$.

On a, grâce aux formules (II.55) une première approximation $X_1(\varphi)$, $Y_1(\varphi)$ pour les fonctions $X(\varphi)$, $Y(\varphi)$. On poursuit de la même manière en lisant sur (C); les fonctions $Y_1(\varphi)$ correspondant à $X_1(\varphi)$, puis en calculant :

$$g_2(\varphi) = Y_1(\varphi) \cos \varphi - X_1(\varphi) \sin \varphi ,$$

et :

$$f_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi') \cotg \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' + \lambda_2 ,$$

etc...

Lorsqu'on a obtenu un couple $f_n(\varphi)$, $g_n(\varphi)$ fournissant une approximation suffisante $X_n(\varphi)$, $Y_n(\varphi)$ de $X(\varphi)$, $Y(\varphi)$, on arrête les calculs; alors :

$$r = \lambda_n .$$

En pratique ⁽¹⁾, il suffit de prendre $n = 2$; la même méthode (moyennant de très légères adaptations) s'applique au cas où (C), tout en étant aplati sur O X n'admettrait plus O X comme axe de symétrie.

Enfin, pour résoudre complètement le problème 1) posé au début du numéro précédent, il restera à calculer dZ/dz ce qui évidemment pourra se faire à l'aide des problèmes b) ou c).

2.3.3.- CALCUL DES OPERATEURS TRIGONOMETRIQUES ⁽²⁾ .-

La méthode que nous allons exposer permet de calculer les opérateurs linéaires A, transformant une fonction $P(\theta)$ en une fonction $Q(\theta)$:

$$Q(\theta) = A [P(\theta)] ,$$

(1) Le principe de cette méthode est celui que nous avons appliqué pour l'étude des profils en incompressible. Toutefois, dans le cas des profils quelques complications, que l'on peut d'ailleurs facilement éliminer, se présentent du fait de la "pointe".

(voir renvoi 2 page 49

et rentrant dans l'une ou l'autre des catégories suivantes :

1^{ère} catégorie : L'opérateur jouit des propriétés suivantes :

$$(II.57) \quad \begin{cases} A(\cos m \theta) = a_m \sin m \theta, \\ A(\sin m \theta) = -a_m \cos m \theta, \\ A(1) = 0. \end{cases}$$

a_m étant une constante non nulle, m étant un entier quelconque différent de zéro.

2^{ème} catégorie : A jouit des propriétés :

$$\begin{cases} A(\cos m \theta) = b_m \cos m \theta, \\ A(\sin m \theta) = b_m \sin m \theta, \\ A(1) = b_0, \end{cases}$$

b_m étant une constante non nulle, m étant un entier quelconque.

Nous appellerons ces opérateurs, "opérateurs trigonométriques". Et les opérations qui font l'objet des problèmes a), b), c) sont précisément des cas particuliers "d'opérateurs trigonométriques".

Il s'agit, connaissant la fonction $P(\theta)$, de calculer la fonction $Q(\theta)$; les fonctions $P(\theta)$ et $Q(\theta)$ sont supposées périodiques, de période 2π . $P(\theta)$ et $Q(\theta)$ étant déterminées approximativement par la connaissance de leurs valeurs pour $2n$ valeurs particulières de θ , régulièrement distribuées dans l'intervalle $0, 2\pi$. On doit admettre que les $2n$ valeurs inconnues de Q sont des fonctions linéaires des $2n$ valeurs connues de P . Tout le problème consiste à calculer les coefficients de ces équations linéaires. C'est ce que nous allons faire en examinant deux modes possibles de calcul.

2.3.3.1. - 1^{er} mode de calcul. -

Le cercle étant divisé en $2n$ parties égales, nous poserons :

$$f_i = f\left(\frac{i\pi}{n}\right).$$

1°. Opérateurs de la 1^{ère} catégorie. - Des considérations évidentes de parité montrent que les Q_i s'expriment en fonction des P_j par des équations de la forme :

$$(II.58) \quad Q_i = \sum_{p=1}^{n-1} K_p (P_{i+p} - P_{i-p}).$$

Appliquons les relations (II.57); c'est-à-dire portons dans les $2n$ équations (II.58) :

$$P(\theta) = \cos m \theta, \quad Q(\theta) = a_m \sin m \theta,$$

$$\text{et:} \quad P(\theta) = \sin m \theta, \quad Q(\theta) = -a_m \cos m \theta.$$

(2) Nous avons donné le principe de cette méthode, pour la première fois en Mars 45 (ref.19). Voir aussi ref.20. A la suite de ce travail, M. WATSON a fourni une démonstration des formules que nous obtenons par une méthode différente (ref.21). Signalons également un "Wartime Report" de IRVEN NAIMAN, datant de Septembre 45, proposant cette même méthode de calcul pour l'intégrale de Poisson (ref.22).

Nous obtenons ainsi 4 n' équations qui se réduisent toutes à l'équation unique :

$$(II.59) \quad \sum_{p=1}^{n-1} K_p \sin p \frac{\mu \pi}{n} = \frac{a_m}{2}.$$

C'est cette réduction qui explique le succès de la méthode. Nous avons (n-1) inconnues K_p à déterminer. Pour cela, on écrira l'équation (II.59), pour les valeurs de p variant de 1 à n-1. Reste à résoudre le système. Si on multiplie la première équation par $\sin \frac{\mu \pi}{n}$, la deuxième par $\sin \frac{2 \mu \pi}{n}$, la (n-1)^{ème} par $\sin (n-1) \frac{\mu \pi}{n}$, et si on ajoute membre à membre, on obtient une relation linéaire entre les K_p , les coefficients de K_p étant :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \sin m \frac{\mu \pi}{n} \sin m \frac{\mu \pi}{n} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \left[\cos m \frac{(\mu-\mu) \pi}{n} - \cos m \frac{(\mu+\mu) \pi}{n} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[C_n \left[\frac{(\mu-\mu) \pi}{n} \right] - C_n \left[\frac{(\mu+\mu) \pi}{n} \right] \right], \end{aligned}$$

avec :

$$C_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \cos m x = \cos \frac{(n-1)x}{2} \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Le coefficient de K_p est donc nul si $p \neq \mu$ et égal à $\frac{n}{2}$ si $p = \mu$.

D'où la valeur cherchée de K_p :

$$(II.60) \quad K_p = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sin \frac{m p \pi}{n}.$$

Appliquons ce résultat au calcul de l'intégrale de Poisson.

Cette intégrale définit un opérateur $Q = A(P)$ de la première catégorie pour lequel $a_m = -1$.

La formule (II.60) s'écrit par suite :

$$K_p = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m p \pi}{n} = \frac{1}{n} S_n \left(\frac{p \pi}{n} \right),$$

si on pose :

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \sin m x = \sin \frac{(n-1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}};$$

donc :

$$(II.61) \quad \begin{cases} K_p = 0, & \text{si } p \text{ pair,} \\ K_p = \frac{1}{n} \cotg \frac{p \pi}{2n}, & \text{si } p \text{ impair.} \end{cases}$$

2°) Opérateurs de la deuxième catégorie. — Les considérations de parité permettent d'écrire la formule générale :

$$(II.62) \quad Q_1 = K_0 P_1 + \sum_{p=1}^{n-1} K_p (P_{1+p} + P_{1-p}) + K_n P_{1+n}.$$

En raisonnant comme précédemment, on est amené à déterminer les coefficients K_p par le système :

$$(II.63) \quad K_0 + \sum_{p=1}^{n-1} 2 K_p \cos m \frac{p \pi}{n} + (-1)^m K_n = b_m,$$

m prenant les valeurs 0, 1, 2, n .

Multipliant la première par $1/2$, la deuxième par $\cos \mu \pi/n$, la troisième par $\cos \frac{2 \mu \pi}{n}$, la n^e par $\cos \frac{(n-1) \mu \pi}{n}$ et la dernière par $(-1)^{\mu/2}$, et ajoutant, il vient une relation linéaire entre les K_p , le coefficient de K_p étant ($p \neq 0$, $p \neq n$):

$$2 \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{p+\mu}}{2} + \frac{1}{2} \left[C_n \left[\frac{(p+\mu) \pi}{n} \right] + C_n \left[\frac{(p-\mu) \pi}{n} \right] - 2 \right] \right],$$

c'est-à-dire n si $\mu = p$ et 0 si $\mu \neq p$.

Le coefficient de K_0 est :

$$\frac{1}{2} + \frac{(-1)^\mu}{2} + \frac{1}{2} \left[C_n \left(\frac{\mu \pi}{n} \right) + C_n \left(-\frac{\mu \pi}{n} \right) - 2 \right],$$

les conclusions précédentes restent valables, il est nul pour $\mu \neq 0$ et égal à n si $\mu = 0$; le même résultat est valable pour K_n . Finalement, on obtient la formule générale de résolution :

$$(II.64) \quad K_p = \frac{1}{n} \left[\frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \cos \frac{m p \pi}{n} + (-1)^p \frac{b_n}{2} \right].$$

Considérons, par exemple, l'opérateur transformant la fonction $P(\theta)$ en la fonction $dQ/d\theta$; Q étant la fonction conjuguée de P ; c'est un opérateur de la seconde catégorie pour lequel :

$$b_m = -m;$$

en appliquant la formule (II.64), il vient :

$$K_0 = -\frac{m}{2}$$

$$K_p = -\frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^{n-1} m \cos \frac{p m \pi}{n} + (-1)^p \frac{b_n}{2} \right], \quad p \neq 0;$$

si on remarque que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x) = \sum_{n=0}^{n-1} m \cos m x = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \left[n \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \sin^2 \frac{n x}{2} \right],$$

on voit que :

$$\begin{cases} K_p = 0, & \text{si } p \text{ pair,} \\ K_p = \frac{1}{n \cdot (1 - \cos \frac{p \cdot \pi}{n})}, & \text{si } p \text{ impair.} \end{cases}$$

2.3.3.2. - 2ème mode de calcul. -

L'examen d'un cas particulier important va nous montrer que, dans certains cas, il sera avantageux d'envisager un deuxième mode de calcul.

La méthode consiste à remplacer la fonction $P(\theta)$ par une fonction de la forme :

$$(II.66.) \quad \Phi(\theta) = \sum_0^n a_n \cos n \cdot \theta + b_n \sin n \cdot \theta$$

pour laquelle la méthode s'applique en toute rigueur; les constantes a_n et b_n étant telles que $P_1 = \Phi_1$. Un opérateur de la 1ère catégorie, des plus importants, est l'opérateur de dérivation, faisant correspondre la fonction $dP/d\theta$ à la fonction $P(\theta)$. Si nous appliquons le 1er mode de calcul, nous remplacerons

$(\frac{dP}{d\theta})_i$ par $(\frac{d\Phi}{d\theta})_i$; or, ce sont précisément aux points $\theta = \frac{i\pi}{n}$ que les dérivées

$\frac{dP}{d\theta}$ et $\frac{d\Phi}{d\theta}$ présentent le plus grand écart. Au contraire, nous aurons une bonne approximation de la fonction $\frac{dP}{d\theta}$ cherchée, en remplaçant :

$$\frac{dP}{d\theta} \left[\frac{(2i+1) \pi}{2n} \right] \quad \text{par} \quad \frac{d\Phi}{d\theta} \left[\frac{(2i+1) \pi}{2n} \right].$$

Nous sommes donc amenés au mode de calcul suivant : le cercle est divisé en $4n$ parties égales; nous poserons donc :

$$f_i = f\left(\frac{i \pi}{2n}\right),$$

et nous exprimerons les $2n$ valeurs Q_{2i} en fonction des $2n$ valeurs P_{2j+1} .

Nous nous limiterons aux opérateurs de la première catégorie. La formule exprimant les Q_{2i} en fonction de P_{2j+1} , s'écrit :

$$Q_{2i} = \sum_{p=1}^n K_p (P_{2i+2p-1} - P_{2i-2p+1}),$$

et on obtient, pour déterminer les K_p , le système :

$$\sum_{p=1}^n K_p \sin \frac{(2p-1) m \pi}{2n} = - \frac{a_m}{2},$$

m variant de 1 à n .

Multipliant la première équation par $\sin \frac{(2p-1) \pi}{2n}$, la deuxième par $\sin \frac{(2p-1)2\pi}{2n}$,
, la $(n-1)$ ème par $\sin \frac{(2p-1) (n-1) \pi}{2n}$, la dernière par $\frac{(-1)^{n-1}}{2}$ et en

ajoutant, on obtient une relation linéaire dans laquelle le coefficient de K_p est :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \sin(2\phi-1) \frac{m\pi}{2n} \sin(2\mu-1) \frac{m\pi}{2n} + \frac{(-1)^{\mu+\phi}}{2} = \\ = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\cos(\phi-\mu) \frac{m\pi}{n} - \cos(\phi+\mu-1) \frac{m\pi}{n} \right] + \frac{(-1)^{\mu-\phi}}{2} = \\ = \frac{1}{2} \left[C_n \left[(\phi-\mu) \frac{\pi}{n} \right] - C_n \left[(\phi+\mu-1) \frac{\pi}{n} \right] + (-1)^{\mu+\phi} \right] ; \end{aligned}$$

le coefficient est nul si $\phi \neq \mu$ et égal à $\frac{n}{2} \sin \phi = \mu$. D'où :

$$(II.67) \quad K_p = -\frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^{n-1} a_m \sin \frac{(2\phi-1) m \pi}{2n} + \frac{(-1)^{\phi-1}}{2} a_n \right] .$$

On peut appliquer ce procédé au calcul de la dérivée d'une fonction périodique. Dans ce cas, $a_m = -m$. En appliquant la formule (II.67); on obtient :

$$(II.68) \quad K_p = (-1)^{\phi-1} \frac{1}{2n \left[1 - \cos \frac{(2\phi-1) \pi}{2n} \right]} .$$

2.3.3.4. - Remarques sur l'emploi des méthodes proposées. -

Pour donner une idée de la précision des méthodes proposées, nous donnerons tout d'abord quelques exemples où l'on connaît, théoriquement, le résultat à trouver.

Prenons, comme couple de fonctions $P(\theta)$, $Q(\theta)$, les fonctions :

$$P(\theta) = \frac{4 \cos 2\theta - 4 \cos \theta + 1}{(5 - 4 \cos \theta)^2} \quad Q(\theta) = \frac{-4 \sin \theta (2 \cos \theta - 1)}{(5 - 4 \cos \theta)^2} ,$$

qui sont respectivement les parties réelles et imaginaires, sur le cercle de rayon 1 de la fonction :

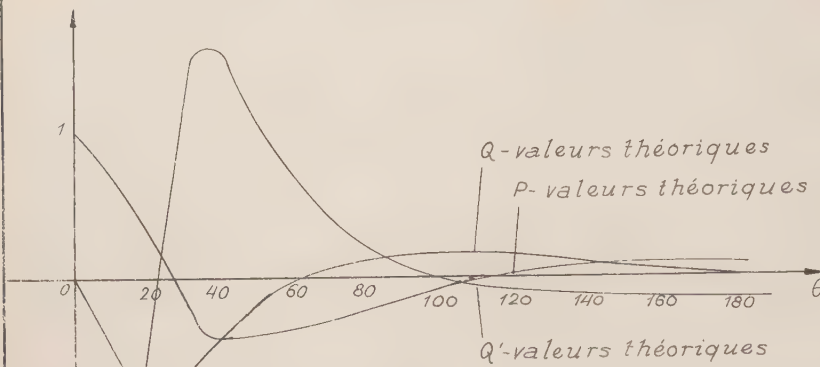
$$f(z) = \frac{1}{(2z-1)^2} \quad , \quad (z = e^{i\theta}) .$$

On trouvera, *figure 22* (page 54), la représentation graphique des fonctions $P(\theta)$, $Q(\theta)$ et de la dérivée $Q'(\theta)$ de cette fonction, ainsi que les valeurs de ces fonctions pour $\theta = \frac{\phi \pi}{12}$ (ϕ étant compris entre 0 et 12). On trouvera, éga-

12

lement, sur la *figure 23* (page 54), les valeurs de $Q(\theta)$, calculées à partir de $P(\theta)$, par la méthode qui vient d'être exposée [coefficients K_p , définies par (II.61)], et sur la *figure 24*, (page 55), les valeurs de $Q'(\theta)$, calculées, d'une part, à partir de $P(\theta)$ [coefficients K_p définis par (II.65)], d'autre part, ces mêmes valeurs calculées à partir de $Q(\theta)$ [coefficients K_p définis par (II.68)]. On constatera que la précision obtenue est excellente, bien que les fonctions choisies aient des variations assez rapides. Or, de tels calculs sont délicats par les méthodes de calcul habituelles; ceci est particulièrement évident dans

Fig. 22



θ	n	15	30	45	60	75	90
P	1	0,46402	-0,19675	-0,38774	-0,33333	-0,22262	-0,12
Q théor.	0	-0,74721	-0,62067	-0,24845	0	0,11856	0,16
Q fig. 22	0	-0,75021	-0,61574	-0,25236	0,00370	0,11576	0,16244
Q'	-4	-1,0119	1,3693	1,2470	0,6667	0,2755	0,0640

θ	105	120	135	150	165	180	
P	-0,03923	0,02041	0,06217	0,09023	0,106	0,11111	
Q théor.	0,16098	0,14139	0,11142	0,07627	0,03864	0	
Q fig. 22	0,15919	0,14287	0,11041	0,07697	0,03830	0	
Q'	-0,0443	-0,0991	-0,1267	-0,1402	-0,1463	-0,1482	

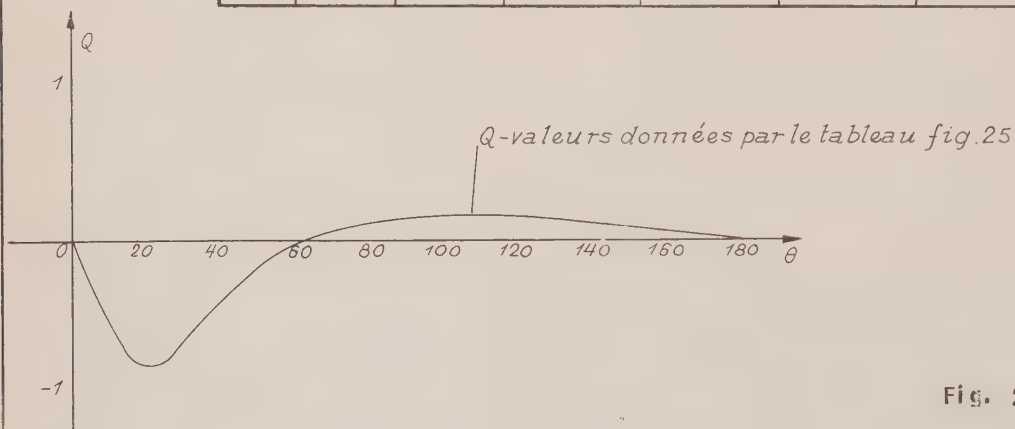
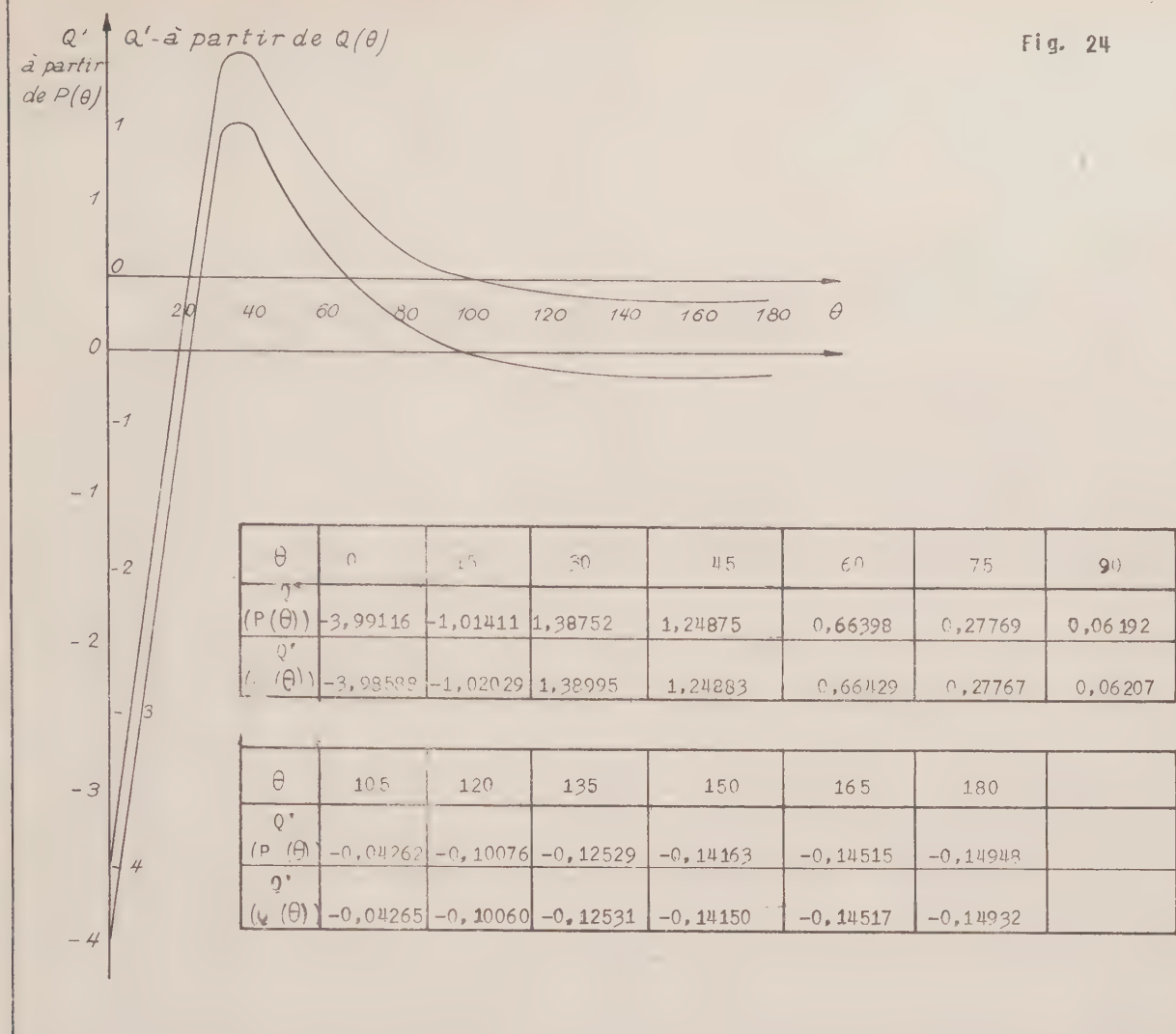


Fig. 23

Le cas de l'intégrale de Poisson; qui est une intégrale à "valeur principale". Des comparaisons systématiques de la méthode des opérateurs trigonométriques avec



celles utilisées jusqu'alors ont été faites par M. THWAITES (ref.23); elles ont montré qu'elle donnait, dans certains calculs, une précision largement supérieure à celle obtenue jusqu'alors.

La conduite du calcul se fait très facilement, à l'aide de tableaux, comme celui représenté (figure 25). On voit que l'on remplit ce tableau parallèlement à la diagonale principale du tableau. Pour une intégrale de Poisson, avec un tel tableau, il suffit d'une heure et demie environ si l'on dispose d'une machine à calculer.

Il est évident, nous avons eu l'occasion de le signaler, que la méthode donne une précision d'autant meilleure que les fonctions sur lesquelles on opère sont "régulières" et présentent des variations "assez faibles". Ceci, en pratique, conduit à deux remarques qui reposent sur "la méthode des différences" et qui améliorent sensiblement le résultat dans certains cas. Nous raisonnerons par exemple, sur le cas de l'intégrale de Poisson.

1) Si la fonction $P(\theta)$ présente des singularités (par exemple discontinuités de la dérivée pour certaines valeurs de θ), il y aura intérêt à chercher une

fonction $P_1(\theta)$, présentant les mêmes singularités que la fonction $P(\theta)$, pour laquelle on connait explicitement la fonction conjuguée $Q_1(\theta)$. On fera le calcul par la fonction $P(\theta) - P_1(\theta)$, qui, elle, ne présente plus de singularité.

2) Si la fonction $P(\theta)$ a un champ de variation très étendu, on cherchera une fonction $P_1(\theta)$, pour laquelle on connait explicitement la fonction $Q_1(\theta)$, telle que la différence $P(\theta) - P_1(\theta)$ garde des valeurs petites, et on opérera sur cette différence.

Enfin notons que, si le calcul de la dérivée d'une fonction $P(\theta)$, tel qu'il vient d'être exposé, nécessite que $P(\theta)$ soit périodique, on peut toujours se ramener à ce cas, en appliquant précisément la "méthode des différences".

2.3.4. - EXEMPLE :

Calcul numérique d'un écoulement autour d'un cône semi-circulaire.

Comme application, nous avons repris le cas du cône semi-circulaire étudié au numéro 2.2.9. la fonction $g(\varphi)$ est donnée par la formule (II.48) et on calculera $g'(\varphi)$ par une intégrale de Poisson. On trouve (fig. 26) la valeur $g'(\varphi)$ ainsi calculée comparée avec la valeur théorique ⁽¹⁾.

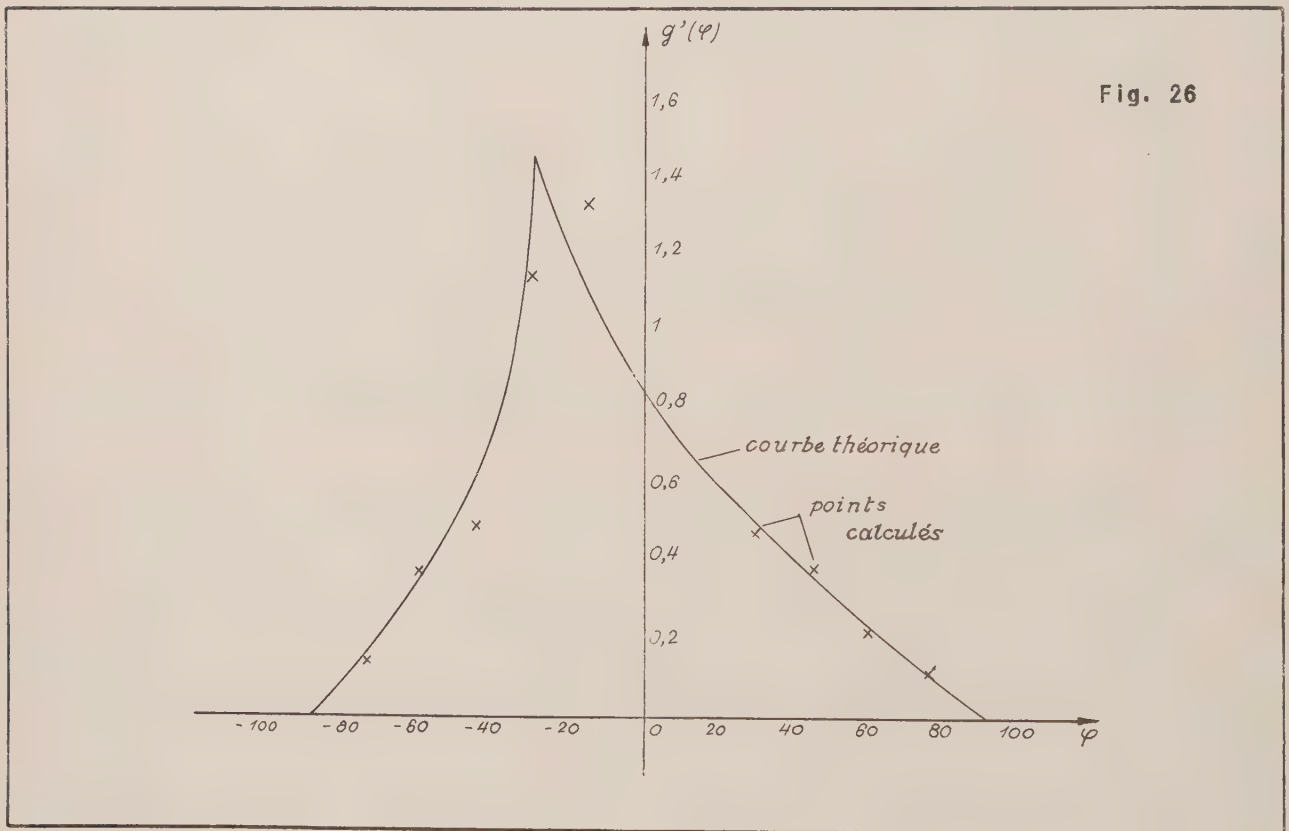


Fig. 26

Il est alors possible de calculer la représentation des pressions, en calculant successivement la fonction H , ZH et l'intégrale $g'(\varphi)$.

On trouvera la répartition de pression, ainsi calculée fig. 19, on peut alors comparer le résultat obtenu par la méthode de calcul, employée dans un cas très défavorable, avec le résultat obtenu théoriquement. (Voir renvoi 1) page 57 ...

INTEGRALE DE POISSON

θ	P	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345
0	1	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
15	0,46402	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
30	-0,19675	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
45	-0,33333	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
60	-0,22262	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
75	-0,12	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
90	-0,03923	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
105	+0,02041	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
120	0,06247	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
135	0,09023	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
150	0,106	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
165	0,11111	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
180	0,106	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
195	0,09023	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
210	0,06247	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
225	0,02041	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
240	-0,03923	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
255	-0,12	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
270	-0,22262	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
285	-0,33333	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
300	-0,33774	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
315	-0,19675	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
330	+0,46402	$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
345		$-K_1$	$-K_2$	$-K_3$	$-K_4$	$-K_5$	$-K_6$	$-K_7$	$-K_8$	$-K_9$	$-K_{10}$	$-K_{11}$	$-K_{12}$	$-K_{13}$	$-K_{14}$	$-K_{15}$	$-K_{16}$	$-K_{17}$	$-K_{18}$	$-K_{19}$	$-K_{20}$	$-K_{21}$	$-K_{22}$	$-K_{23}$	$-K_{24}$
Q		0	-0,75021	-0,61574	-0,25236	+0,00370	+0,11576	+0,16244	+0,15999	+0,14237	+0,11041	+0,07697	+0,03820	0	-0,03830	-0,07697	-0,11041	-0,14237	-0,15999	-0,16244	-0,11576	-0,00370	+0,25236	+0,61574	+0,75021

coefficients
 $K_1 = 0,632980$
 $K_2 = 0,201185$
 $K_3 = 0,108602$
 $K_4 = 0,063944$
 $K_5 = 0,034518$
 $K_6 = 0,010971$

3.- ECOULEMENTS CONIQUES INFINIMENT APLATIS

Ce chapitre aura pour but l'étude des écoulements coniques du deuxième type (voir chapitre I N° 1.2.8). Avant d'aborder l'étude proprement dite, faisons quelques remarques sur les conditions aux limites. Le cône obstacle est aplati sur le plan Ox_1x_2 . Dans ces conditions, si on reprend la formule (I.27) :

$$(I.27) \quad w x'_2 - v x'_3 = \frac{1}{\beta} (x_3 x'_2 - x_2 x'_3) (1+u) ,$$

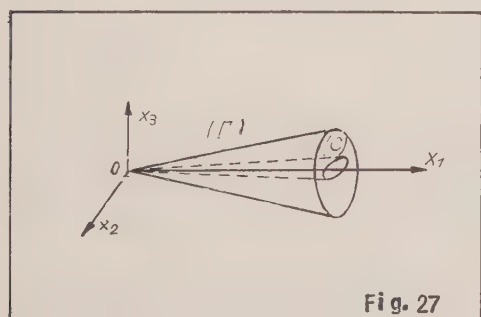
on peut dire qu'en première approximation, elle se réduit à :

$$(III.1) \quad w x'_2 = \frac{1}{\beta} (x_3 x'_2 - x_2 x'_3) ,$$

puisque x_3 , x'_3 , v , u sont des infiniments petits du premier ordre, tandis que x_2 et x'_2 ne sont pas infiniment petits. Dans ces conditions, on peut dire que l'on connaît la fonction w sur le contour (C). D'autre part, on peut, dans le cadre des approximations faites, écrire cette condition aux limites sur la surface (d) du plan Ox_1x_2 , projection du cône obstacle sur le plan. Désignons, en effet, provisoirement, par $w^{(1)}(x_1x_2x_3)$ la valeur de w quand on opère ainsi :

$$w^{(1)}(x_1, x_2(t), x_3(t)) = w^{(1)}\left[x_1, x_2(t), 0\right] + x_3(t) \cdot \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x_3}\left[x_1, x_2(t), 0\right] ;$$

les dérivées de w étant supposées, par hypothèse, du premier ordre et l'équation aux limites, écrite en négligeant les termes du second ordre, la simplification en vue se trouve légitimée.



Divers cas peuvent se produire, suivant que le cône obstacle est entièrement compris à l'intérieur du cône de Mach (fig. 27), déborde complètement le cône de Mach (fig. 28, page 58), se trouve entièrement extérieur au cône de Mach (fig. 29, page 58) se trouve partiellement intérieur et partiellement extérieur au cône de Mach (fig. 30, page 58). Dans chacun de ces cas, il y a deux problèmes élémentaires, particulièrement intéressants à résoudre, le premier où la relation (III.1) se réduit à :

$$w = \text{constante} = w_0 ,$$

(1) Nous avons voulu examiner la précision des méthodes proposées, en nous plaçant dans un cas extrêmement défavorable, sans tenir compte des singularités présentées par la fonction $g(\varphi)$. Pour opérer numériquement avec une grande précision, il aurait fallu, dans ce cas particulier, appliquer le lemme de Schwartz, en complétant par symétrie par rapport à Ox , le contour (C).

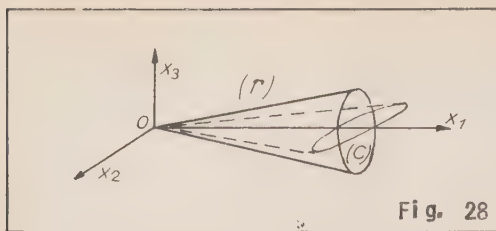


Fig. 28

que nous appellerons le problème élémentaire portant (l'écoulement correspondant est l'écoulement autour d'une aile en Δ , placée avec une certaine incidence); le second où la relation (III.1) se réduit à :

$$\begin{cases} w = w_0, & \text{pour } x_3 = +0, \\ w = -w_0, & \text{pour } x_3 = -0, \end{cases}$$

que nous appellerons problème élémentaire symétrique. C'est le cas, par exemple de l'écoulement autour d'un corps constitué essentiellement de deux ailes Δ , symétriques par rapport à Ox_1x_2 , et formant un angle infiniment petit avec ce plan. C'est aussi celui qu'on obtiendrait avec un cône dont la section par un plan parallèle à Ox_2x_3 , serait un losange infiniment aplati. Le fait qu'on obtienne la même formulation mathématique, pour deux cas différents, marque bien le caractère relatif des résultats qui seront obtenus. Dans le cas du problème symétrique, on peut naturellement supposer que w est nul sur le plan Ox_1x_2 , en tout point situé en dehors de (d) .

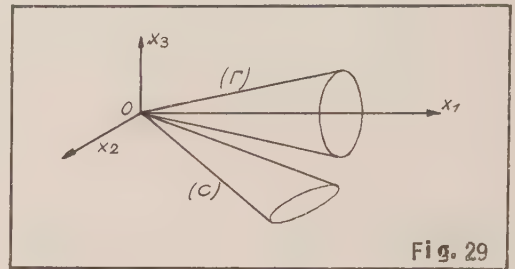


Fig. 29

Signalons enfin que très souvent, les résultats obtenus ne satisfont pas aux conditions des écoulements linéarisés; en particulier, les composantes de la vitesse et leurs dérivées seront souvent infinies le long des demi-droites limitant l'aile (d) . Une fois de plus, nous admettrons cependant que les résultats trouvés fournissent une première approximation du problème posé, conformément aux remarques faites au N° 1.1.3 du 1er chapitre.

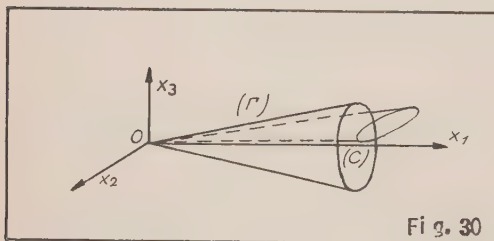


Fig. 30

3.1.- Cône obstacle entièrement intérieur au cône de Mach.-

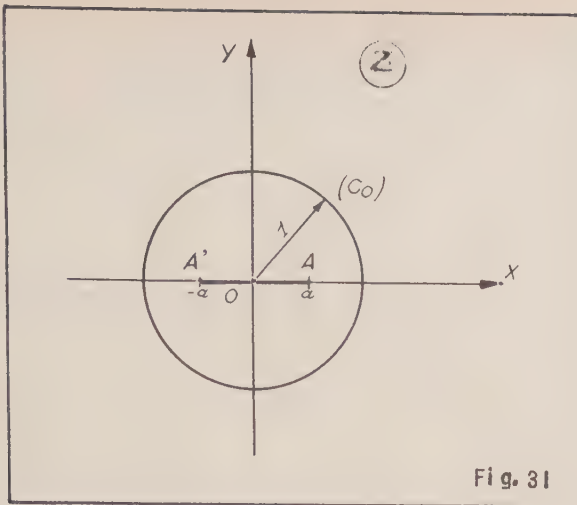
3.1.1.- ETUDE DES PROBLEMES ELEMENTAIRES.-

Le cas du cône portant a déjà fait l'objet d'un mémoire de Stewart (ref. 10) mais la démonstration qui va être faite est plus élémentaire, et nous permettra de traiter simultanément les cas portant et symétrique.

3.1.1.1.- Définition de la fonction $F(Z)$.

Nous ferons l'étude dans le plan Z . Soit $A'A$ ($-a, +a$) la coupure image de la surface (d) ⁽¹⁾; (C_0) , comme à l'ordinaire, le cercle de rayon 1 (fig. 31).

(1) On suppose, pour commencer, que le problème admet le plan Ox_1x_2 , comme plan de symétrie.



Nous allons, naturellement, travailler sur la fonction $W(Z)$. Une des conditions à réaliser, que nous retrouverons partout dans la suite, est que dW/dZ soit divisible par (Z^2-1) , sinon les relations de compatibilité montrent que $U(Z)$ admettrait, comme points singuliers, les points $Z = \pm 1$, ce qui est inadmissible. Ainsi nous introduisons la fonction :

$$(III.2) \quad F(Z) = \frac{Z^2}{Z^2-1} \frac{dW}{dZ},$$

et nous allons chercher à déterminer $F(Z)$ pour le problème symétrique, comme pour le problème portant.

$F(Z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur du domaine (D) , limité par la coupure et le cercle (C_0) ; les seuls points singuliers que cette fonction peut présenter, sur la frontière de (D) , sont A et A' ; d'autre part, $F(Z)$ doit être divisible par Z^2 , sinon U, V, W auraient des singularités à l'origine. Sur les deux bords de la coupure $F(Z)$ doit avoir une partie réelle nulle. Sur le cercle (C_0) :

$$\frac{Z}{Z^2-1} = \frac{1}{Z-\frac{1}{Z}} = \frac{1}{2i \sin \theta},$$

$$Z \frac{dW}{dZ} = e^{i\theta} \frac{dW}{dZ} = -i \frac{dW}{d\theta};$$

par conséquent $F(Z)$ a également une partie réelle nulle sur (C_0) . $F(Z)$ ne pouvant pas être identiquement nul, et sa partie réelle étant nulle sur la frontière de (D) , doit admettre A et A' comme points singuliers. Nous allons étudier la nature de ces singularités.

3.1.1.2. - Singularités de $F(Z)$:-

Physiquement, il est clair que A et A' ne peuvent pas être des points singuliers essentiels. Supposons donc que, aux environs de $Z = a$, on ait :

$$F(Z) \sim K_{m_0} (Z-a)^{m_0},$$

m_0 étant quelconque, $K_{m_0} \neq 0$;

posons :

$$Z - a = re^{i\varphi},$$

φ étant égal à $+\pi$ sur le bord supérieur de la coupure, à $-\pi$ sur le bord inférieur; pour des valeurs suffisamment petites de r :

$$K_{m_0} r^{m_0} e^{im_0\pi} \quad \text{et} \quad K_{m_0} r^{m_0} e^{-im_0\pi}$$

doivent être imaginaires purs; il en sera donc de même de :

$$K_{m_0} \cos m_0 \pi, \quad \text{et de} \quad i K_{m_0} \sin m_0 \pi;$$

$$K_{m_0}^2 = K_{m_0}^2 \cos^2 m \pi - (i K_{m_0} \sin m \pi)^2$$

est donc réel. D'autre part :

$$i K_{m_0}^2 \frac{\sin 2 m_0 \pi}{2} = (K_{m_0} \cos m_0 \pi) (i K_{m_0} \sin m_0 \pi)$$

doit être réel, ce qui entraîne :

$$\sin 2 m_0 \pi = 0.$$

Il y a donc deux possibilités; désignons par k un entier arbitraire, ou bien :

$$m_0 = k, \quad K_{m_0} \text{ est imaginaire pur,}$$

ou bien :

$$m_0 = k + \frac{1}{2}, \quad K_{m_0} \text{ est réel.}$$

Considérons maintenant :

$$F_1(Z) = F(Z) - K_{m_0} (Z-a)^{m_0};$$

aux environs de $Z = a$:

$$F_1(Z) \sim K_{m_1} (Z-a)^{m_1},$$

et le même raisonnement montre que $2 m_1$ doit être entier.

Finalement, on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME : A l'intérieur de (C_0) , la fonction $F(Z)$ peut se mettre sous la forme :

$$(III.3) \quad F(Z) = \Phi(Z) + \frac{1}{\sqrt{a^2 - Z^2}} \Psi(Z),$$

$\Phi(Z)$ et $\Psi(Z)$ n'admettant pas d'autres singularités que des pôles en A et A' .

L'analyse que nous allons faire va être simplifiée, par suite de certaines conditions de symétrie auxquelles satisfait $F(Z)$. Posons :

$$W = w + i w',$$

$w(X, Y)$ est évidemment pair en X (lorsque Y est constant).

Par conséquent, $F(Z)$ a une partie réelle nulle sur OY . En appliquant le principe de Schwartz, on peut écrire :

$$(III.4) \quad F(Z) = -\overline{F(-\bar{Z})}.$$

Cette équation montre que la connaissance du développement de $F(Z)$ autour de $Z = a$, entraîne immédiatement celle de $F(Z)$ autour de $Z = -a$.

3.1.1.3. — Etude du cas où $F(Z)$ est uniforme [$\Psi(Z) = 0$]

Considérons la fonction :

$$(III.5) \quad A_p(Z) = \frac{i Z^{2p}}{[(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)]^p},$$

p entier et $p \geq 1$.

Elle satisfait à toutes les conditions imposées à $F(Z)$.

En effet, elle satisfait à (III.4); à l'intérieur de (C_0) , elle n'admet d'autres singularités que a et $-a$, qui sont des pôles d'ordre p . Sa partie réelle est nulle sur la coupure, ainsi que sur (C_0) , comme on le voit en écrivant :

$$A_p(Z) = \frac{i}{\left[a^2 \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2} \right) - (1+a^4) \right]^p}.$$

Enfin, l'origine est bien zéro double (au moins).

Soit $F(Z)$, la solution générale du problème posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME : si $F(Z)$ est uniforme on a :

$$(III.6) \quad F(Z) = \sum_1^n \lambda_p A_p(Z) = i \sum_1^n \frac{\lambda_p Z^{2p}}{\left[(a^2 - Z^2) (1 - a^2 Z^2) \right]^p},$$

n étant un entier, les λ_p des coefficients réels.

En effet, soit $F(Z)$ une solution du problème ayant un pôle d'ordre n , on peut déterminer un nombre λ_n tel que :

$$F_1(Z) = F(Z) - \lambda_n A_n(Z)$$

soit une solution n'admettant le pôle $Z = a$ qu'à l'ordre $(n-1)$ au plus. Mais en vertu de (III.4), $F_1(Z)$ admettra $Z = -a$ comme pôle d'ordre $(n-1)$ au plus. En procédant par récurrence, on arrive à définir une fonction :

$$F_n(Z) = F(Z) - \sum_1^n \lambda_p A_p(Z)$$

qui doit satisfaire à toutes les conditions du problème et être holomorphe à l'intérieur de (C_0) . Les conditions aux limites, sur le cercle et sur la coupure entraînent que $F_n(Z)$ est une constante, qui doit être nulle puisque $F_n(Z)$ doit s'annuler à l'origine.

3.1.1.4. - Cas où $\Phi(Z) = 0$.

Nous étudierons le cas où $\Phi(Z) = 0$, par une voie tout à fait analogue.

Posons :

$$f(Z) = \frac{\sqrt{(a^2 - Z^2) (1 - a^2 Z^2)}}{Z} F(Z);$$

$f(Z)$ est une fonction uniforme à l'intérieur de (C_0) , n'admettant comme pôles que les points $(Z = -a, Z = a)$. En effet, l'origine n'est pas un pôle puisque $F(Z)$ est divisible par Z^2 par hypothèse. La fonction $f(Z)$ jouit des propriétés suivantes; elle est imaginaire sur la coupure, réelle sur (C_0) et réelle sur OY (ce qui entraîne des propriétés de symétrie quand on change Z en $-\bar{Z}$). De plus $f(Z)$ admet l'origine, comme zéro d'ordre 1 au moins. Toutes ces propriétés appartiennent également aux fonctions :

$$B_p(Z) = A_p\left(Z - \frac{1}{Z}\right) = \frac{i Z^{2p-1} (Z^2 - 1)}{\left[(a^2 - Z^2) (1 - a^2 Z^2) \right]^p},$$

p étant un entier ≥ 1 .

On en déduit donc, comme précédemment, le théorème :

THEOREME : Dans le cas où $\Phi(Z) = 0$, on peut écrire :

...

$$(III.7) \quad F(Z) = i \sum_{p=1}^n \lambda_p \frac{Z^{2p} (Z^2 - 1)}{[(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)]^{p + \frac{1}{2}}},$$

n étant un entier, les λ_p étant réels.

3.1.1.5. - Le principe des "singularités minimum". -

Les formules (III.6) et (III.7) dépendent d'un nombre arbitraire de coefficients. Or la seule donnée que nous connaissons est le nombre w_0 valeur que prend w sur le bord supérieur de la coupure. Il nous faut donc introduire un principe qui garantira l'unicité de la solution des problèmes que nous nous sommes posés. Ce principe, que nous appellerons principe des "singularités minimum", peut se formuler de la façon suivante (il est d'un emploi constant en physique mathématique) :

Lorsque les conditions d'un problème obligent à introduire des fonctions présentant des singularités, on se contentera, dans le cas d'une indétermination, d'introduire les singularités d'ordre le moins élevé possible, qui permettent la résolution complète du problème posé.

Dans le cas qui nous intéresse, cela revient à dire que nous prendrons $n = 1$, dans les formules (III.6) et (III.7). Pour le problème qui nous intéresse, la signification de ce principe est immédiate, cela revient à dire que $F(Z)$ et par suite dW/dZ doit être d'ordre inférieur à 2 en $1/Z - a$ ou $W(Z)$ d'ordre inférieur à 1 par rapport à ce même infiniment grand; les considérations développées au N° 2.2.7., montrent que ces conditions entraînent que les efforts globaux restent finis.

3.1.1.6. - Résolution du problème élémentaire symétrique. -

Reprenons la formule (III.6); on en déduit, d'après (III.2), que dans le cas où $F(Z)$ est uniforme :

$$\frac{dW}{dZ} = i \lambda_1 \frac{Z^2 - 1}{(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)},$$

et par suite :

$$W(Z) = \frac{i \lambda_1}{2 a (1 + a^2)} \log \frac{(a - Z)(1 - aZ)}{(a + Z)(1 + aZ)} + w_0,$$

la détermination du logarithme étant telle que la partie réelle de $W(Z)$ soit nulle sur (C_0) . D'ailleurs :

$$\lambda_1 = - \frac{2 a (1 + a^2) w_0}{\pi};$$

sur le bord supérieur de la coupure :

$$w = w_0,$$

et sur le bord inférieur, w prend la valeur opposée. Ceci nous montre que le cas étudié est celui du problème symétrique. La valeur $W(Z)$ pour ce problème est donc :

$$(III.8) \quad W(Z) = - \frac{i w_0}{\pi} \log \left[\frac{(a - Z)(1 - aZ)}{(a + Z)(1 + aZ)} \right] + w_0.$$

Le calcul des fonctions $U(Z)$ et $V(Z)$ n'offre aucune difficulté. Il suffit d'appliquer les relations de compatibilité (I.25) et d'intégrer; la seule précaution à prendre consiste à choisir la constante d'intégration de manière à annuler les parties réelles de U et V sur (C_0) ; on trouve alors :

$$(III.9) \quad V(Z) = \frac{w_0}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \log \left[\frac{(a+Z)(1-aZ)}{(Z-a)(1+aZ)} \right],$$

et :

$$(III.10) \quad U(Z) = \frac{2 w_0 a}{\pi \beta (1-a^2)} \log \left[\frac{Z^2 - a^2}{1 - a^2 Z^2} \right].$$

Cette dernière formule est la plus intéressante, car elle permet le calcul du coefficient de pression (voir formule (I.8)). On trouve :

$$(II.11) \quad C_p = - \frac{4 w_0}{\pi \beta} \frac{a}{1-a^2} \log \left[\frac{a^2 - X^2}{1 - a^2 X^2} \right].$$

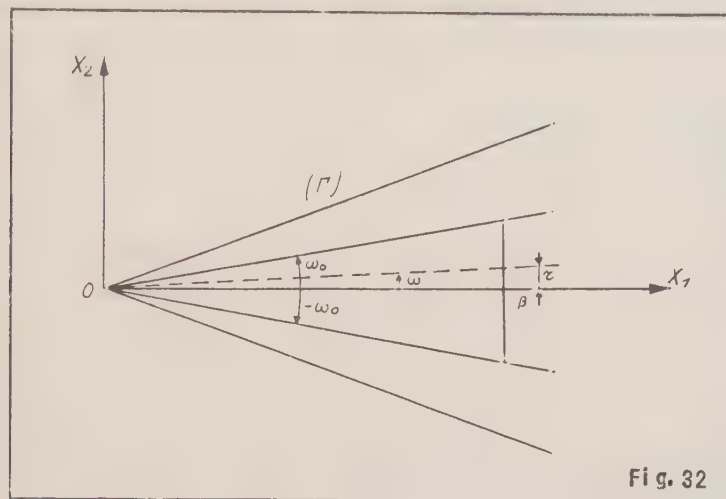


Fig. 32

Pour interpréter cette formule, il faut relier les grandeurs a , X , à des grandeurs géométriques, relatives au cône donné. Tout d'abord :

$$w_0 = \alpha$$

α étant l'inclinaison constante du cône sur Ox . D'autre part :

$$\frac{2X}{1+X^2} = \beta \frac{r}{x_1} = \beta \operatorname{tg} \omega,$$

d'où :

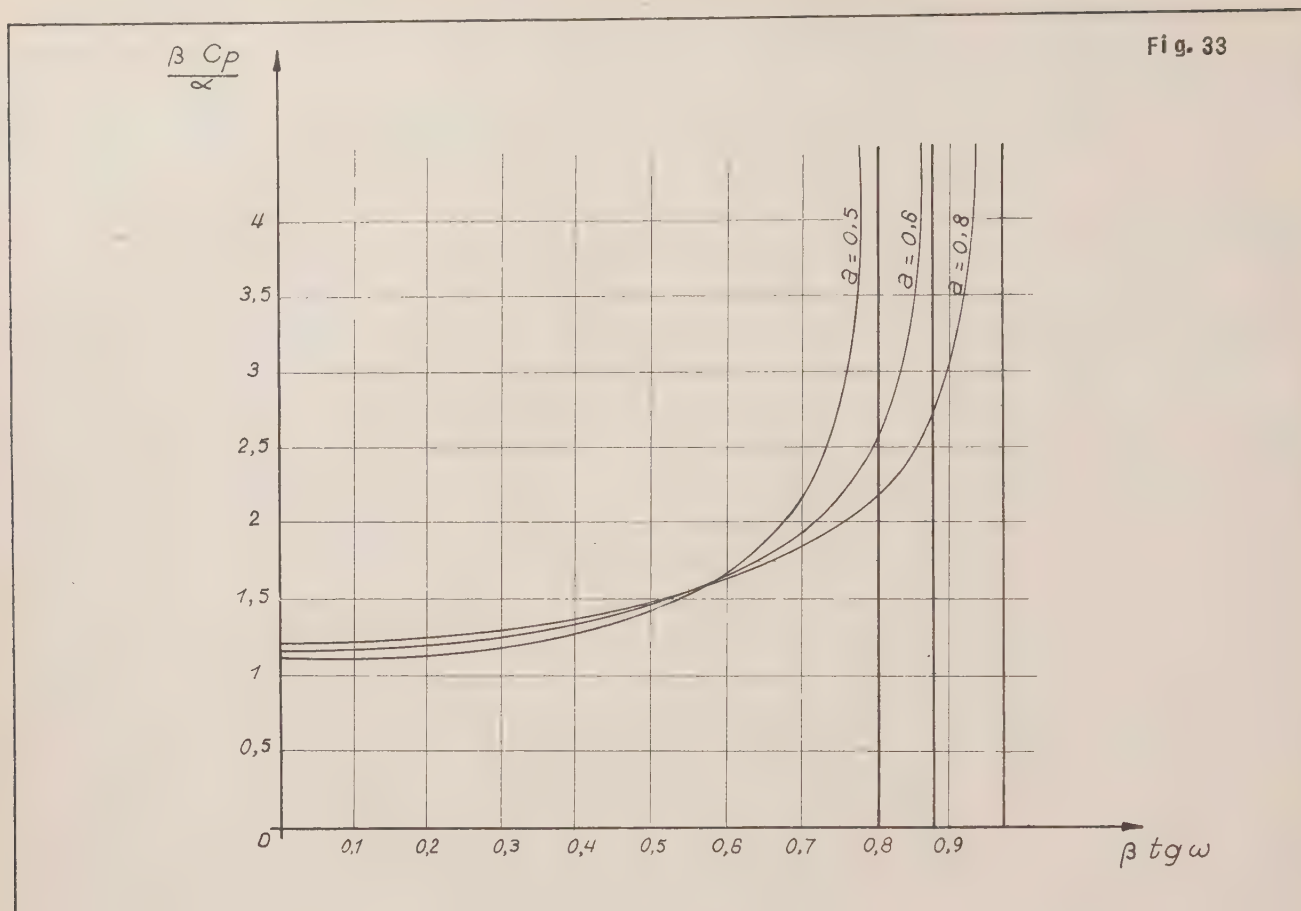
$$X = \frac{\cos \omega - \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \omega}}{\beta \sin \omega},$$

(voir fig. 32) et :

$$(III.12) \quad a = \frac{\cos \omega_0 - \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \omega_0}}{\beta \sin \omega_0}.$$

On trouvera, fig. 33 page 64, les courbes donnant les valeurs de C_p en fonction

de ω , pour divers nombres de Mach et diverses valeurs de ω_0 .



3.1.1.7. — Résolution du problème élémentaire portant. —

Si l'on part de la formule (III.7), on obtient :

$$\frac{dW}{dZ} = i \lambda_1 \frac{(Z^2 - 1)^2}{[(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)]^{\frac{3}{2}}} ;$$

l'intégration donnant $W(Z)$ introduit des fonctions elliptiques (cf. N° 3.1.1.3), par contre, il va nous être possible de calculer $U(Z)$. Remarquons auparavant que, d'après la formule précédente, $W(Z)$ prend la même valeur sur les deux bords de la coupure et, par suite, cette solution correspond au problème portant.

Les relations de compatibilité montrent que :

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{2 \lambda_1}{\beta} \frac{Z (Z^2 - 1)}{[(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)]^{\frac{3}{2}}} ,$$

et par suite :

$$(III.13) \quad U(Z) = - \frac{2 \lambda_1}{\beta (a^2 + 1)^2} \frac{Z^2 + 1}{[(a^2 - Z^2)(1 - a^2 Z^2)]^{\frac{1}{2}}} .$$

Il reste à calculer λ_1 , en fonction de w_0 . Pour cela, on peut écrire :

$$-w_0 = \int_0^i \frac{dW}{dZ} dZ = i \lambda_1 \int_0^i \frac{(Z^2-1)^2 dZ}{[(a^2-Z^2)(1-a^2Z^2)]^{\frac{3}{2}}} ;$$

posons dans cette intégrale $Z = iu$:

$$w_0 = \lambda_1 \int_0^1 \frac{(1+u^2)^2 du}{[(a^2+u^2)(1+a^2u^2)]^{\frac{3}{2}}} = \lambda_1 I(a) ,$$

le calcul de $I(a)$ peut s'effectuer à l'aide de la fonction E (voir ref.24 P.517). En effet, posons :

$$u + \frac{1}{u} = \frac{2}{t} .$$

Il vient après quelques calculs :

$$I(a) = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} [4a^2 + (a^2-1)^2 t^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

Enfin, le changement de variable :

$$\sin \varphi = \frac{t(a^2+1)}{\sqrt{1-a^2 + (a^2-1)^2 t^2}}$$

montre que, si on pose :

$$k = \frac{1-a^2}{1+a^2} ,$$

$$I = \frac{1}{a^2(a^2+1)} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{\sqrt{1-a^2 + (a^2-1)^2 t^2}} = \frac{1}{a^2(a^2+1)} E\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) .$$

D'où la nouvelle formule pour $U(Z)$:

$$(III.14) \quad U(Z) = -\frac{2}{\beta} \frac{a^2 w_0}{(a^2+1) E\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)} \frac{Z^2+1}{[(a^2-Z^2)(1-a^2Z^2)]^{\frac{1}{2}}} .$$

Il reste à relier a et Z aux grandeurs géométriques. On a (fig.32) :

$$\frac{2a}{1+a^2} = \beta \operatorname{tg} w_0 , \quad \frac{2X}{1+X^2} = \beta \operatorname{tg} w ;$$

posons :

$$t = \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w_0} ,$$

il vient :

$$u = -\frac{w_0 \operatorname{tg} w_0}{E[\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{tg}^2 w_0}]} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} ,$$

et :

$$(III.15) \quad C_p = \frac{2a \operatorname{tg} w_0}{E[\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{tg}^2 w_0}]} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} ,$$

quand on pose, comme à l'ordinaire :

$$w_0 = \alpha .$$

Si w_0 est petit, $E \left[\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \omega_0} \right]$ est voisin de 1 et la formule (III.15) aux notations près, redonne un résultat déjà trouvé [formule (II.33)].

D'autre part, si $\beta \operatorname{tg} \omega_0 \rightarrow 1$:

$$E \left[\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \omega_0} \right] \rightarrow \frac{\pi}{2} ,$$

et la formule (III.15) s'écrit :

$$C_P = \frac{4}{\beta} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} .$$

REMARQUE.— On voit ainsi que, pour obtenir le coefficient de pression, il n'est pas besoin de faire intervenir les fonctions elliptiques d'une façon essentielle. Elles n'apparaissent, en réalité, que dans le coefficient multiplicatif. La démonstration de Stewart, (ref. 10), au contraire, fait intervenir essentiellement les fonctions elliptiques. Ces fonctions sont toutefois indispensables, dans le calcul explicite de $W(Z)$ et $V(Z)$.

3. 1. 1. 8. — Calcul de $W(Z)$ et $V(Z)$.

Il y a plusieurs façons simples de calculer $W(Z)$, la première consiste à poser ⁽¹⁾ :

$$(III.16) \quad Z = a \operatorname{sn}(u, a^2) , \quad (k = a^2) .$$

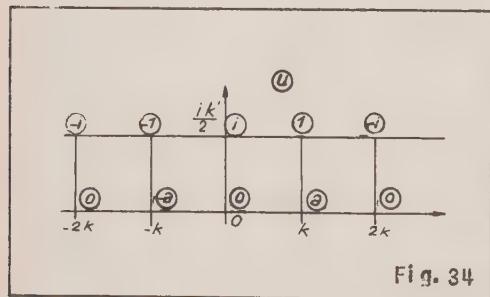


Fig. 34

Cette transformation effectue la représentation conforme du domaine (D) sur une bande du plan u (voir fig. 34); les valeurs inscrites dans un rond, indiquent les valeurs de Z prises pour la valeur de u correspondante.

On a en effet :

$$\operatorname{sn} 0 = 0 , \quad \operatorname{sn} K = 1 ,$$

$$\operatorname{sn} \left(\frac{i}{2} K' \right) = i \operatorname{sc} \left(\frac{K'}{2}, k' \right) = \frac{i}{\sqrt{k}} = \frac{i}{a} ,$$

$$\operatorname{sn} \left(K + \frac{i}{2} K' \right) = \operatorname{cd} \left(\frac{i}{2} K' \right) = \frac{1}{\operatorname{dn} \left(\frac{K'}{2}, k' \right)} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{a} .$$

Dans ces conditions :

$$\frac{dW}{du} = \frac{dW}{dZ} \frac{dZ}{du} = \frac{i \lambda_1 (Z^2 - 1)^2}{(a^2 - Z^2) (1 - a^2 Z^2)} = i \lambda_1 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \left[\frac{1}{Z^2 - a^2} - \frac{1}{a^2 (a^2 Z^2 - 1)} \right] \right] =$$

$$= \frac{i \lambda_1}{a^2} \left[1 + \frac{1}{\operatorname{dn}^2 u} - \frac{1}{\operatorname{cn}^2 u} \right] ,$$

(voir renvoi 1 page suivante...)

d'où :

$$(III.17) \quad W(u) = w_0 + \frac{i \lambda_1}{a^2 (a^2+1)^2} \left[2(a^2+1)u - 2E(u) + \frac{a^4 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \right].$$

Si on veut déterminer λ_1 , il suffit d'écrire, par exemple, que :

$$W\left(\frac{i K'}{2}\right) = 0.$$

Or :

$$W\left(\frac{i K'}{2}\right) = \frac{i \lambda_1}{a^2 (a^2+1)^2} \left[(a^2+1) i (1+K') - 2E\left(\frac{i K'}{2}\right) \right] + w_0 = 0;$$

mais :

$$2E\left(\frac{i K'}{2}\right) = iK' + 2i \operatorname{dn}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) \operatorname{sc}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) - 2iE\left(\frac{K'}{2}, k'\right),$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) \operatorname{sc}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) = 1,$$

$$2E\left(\frac{K'}{2}, k'\right) = E(K', k') + \frac{k'^2}{1+k'},$$

d'où la valeur de λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{w_0 a^2 (a^2+1)^2}{a^2 K' + E(k')}.$$

Cette expression diffère de la formule donnée pour λ_1 au cours du numéro 3.1.7; on peut d'ailleurs, d'une façon générale, mettre sous une autre forme la formule (III.17), en faisant intervenir un module $k_1 = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, différent du module $k = a^2$ utilisé jusqu'ici, en appliquant la transformation de Landen.

Cette transformation permet, en particulier, d'établir la formule suivante :

$$E\left[(1+k)u, k_1\right] = \frac{1}{1+k} \left[2E(u, k') + 2ku - k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u \right],$$

les fonctions du membre de droite de l'égalité précédente étant relatives au module $k' = \sqrt{1-a^4}$.

Si on pose :

$$u = iy,$$

cette formule s'écrit :

$$E\left[(1+k)iy, k_1\right] = \frac{i}{1+k} \left[2(1+k)y - 2E(y, k) + \frac{2 \operatorname{dn} y \operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y} - \frac{k'^2 \operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y \operatorname{dn} y} \right],$$

ces dernières fonctions étant relatives au module $k = a^2$.

...

(1) Pour toutes les propriétés des fonctions elliptiques dont il est fait usage dans le texte, voir par exemple la ref. 24. Dans ce paragraphe, u sera une variable complexe et n'aura pas de rapport avec la composante de la vitesse suivant Ox_1 .

Mais :

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{dn} y \operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y} - k^2 \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y \operatorname{dn} y} &= \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y \operatorname{dn} y} \left[2 \operatorname{dn}^2 y - k'^2 \right] = \\ &= \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y \operatorname{dn} y} (k^2 \operatorname{cn}^2 y + \operatorname{dn}^2 y) = a^4 \frac{\operatorname{sn} y \operatorname{cn} y}{\operatorname{dn} y} + \frac{\operatorname{dn} y \operatorname{sn} y}{\operatorname{cn} y} . \end{aligned}$$

Si l'on se reporte alors à la formule (III.17), on voit qu'elle s'écrit encore :

$$W(u) = w_0 + \frac{\lambda_1}{a^2 (a^2 + 1)} E \left[(1+a^2) iu, k_1 \right] ,$$

et dans ces conditions :

$$W \left(\frac{i K'}{2} \right) = w_0 - \frac{\lambda_1}{a^2 (a^2 + 1)} E \left[\frac{(1+k) K'}{2}, k_1 \right] = 0 .$$

Mais $K_1 = \frac{(1+k) K'}{2}$ est précisément tel que :

$$\operatorname{sn}(K_1, k_1) = 1 ,$$

par suite :

$$\lambda_1 = \frac{w_0 a^2 (a^2 + 1)}{E \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)} ,$$

ce qui est bien la formule précédemment trouvée. D'où :

$$(III.18) \quad W(u) = w_0 \left[1 + \frac{E \left[(1+a^2) iu, k_1 \right]}{E(k_1)} \right] .$$

On peut encore procéder d'une autre façon, en introduisant une autre variable que la variable u .

Posons :

$$t = \frac{2 i Z}{Z^2 - 1} ,$$

l'intégration de $\frac{dW}{dZ}$ conduit à :

$$W(t) = w_0 - 4 \lambda_1 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \left[4 a^2 + (a^2 - 1)^2 t^2 \right]^{\frac{3}{2}}} ;$$

posons :

$$k_1 = \frac{1-a^2}{1+a^2} ,$$

le module complémentaire est $\frac{2a}{1+a^2}$.

Si donc on pose :

$$t = \operatorname{cn}(\tau, k_1) ,$$

$$W(\tau) = w_0 + \frac{4\lambda_1}{(\alpha^2+1)^3} \int_{K_1}^{\tau} \frac{d\tau}{dn^2 \tau} =$$

$$= w_0 - \frac{\lambda_1}{\alpha^2(\alpha^2+1)} \left[E(k_1) - E(\tau, k_1) + \frac{(1-\alpha^2)^2}{(1+\alpha^2)^2} \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau}{dn \tau} \right].$$

Si $Z = i$, $t = 1$, $\tau = 0$, on trouve toujours bien la même valeur pour λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{w_0 \alpha^2 (\alpha^2+1)}{E\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)},$$

et :

$$(III.19) \quad W(\tau) = w_0 \left[\frac{E(\tau, k_1)}{E(k_1)} - \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2 \frac{1}{E(k_1)} \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau}{dn \tau} \right].$$

Les formules (III.18) et (III.19) sont indiquées pour le calcul de W le long de l'axe OY , (III.17) étant plus apte au calcul de W , le long de l'axe OX . Passons maintenant au calcul de $V(Z)$. Le calcul à l'aide de la variable u est particulièrement simple. dV/dZ se calcule à l'aide des relations de compatibilité :

$$\frac{dV}{dZ} = - \frac{w_0 \alpha^2 (\alpha^2+1)}{E(k_1)} \frac{Z^4 - 1}{[(\alpha^2 - Z^2)(1 - \alpha^2 Z^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Rappelons que :

$$k_1 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Effectuons le changement de variable (III.18). Il vient immédiatement :

$$\frac{dV}{du} = \frac{w_0 (\alpha^2+1)}{E(k_1)} \frac{1 - \alpha^4 \operatorname{sn}^4 u}{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u};$$

mais V doit être nul pour $u = 0$, l'intégration de dV/du donne alors :

$$(III.20) \quad V(u) = \frac{w_0 (\alpha^2+1)}{E(k_1)} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u};$$

vérifions, par exemple, que pour $Z = i$, V a une partie réelle nulle,

$$Z = i \text{ correspond à } u = \frac{i K'}{2},$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{i K'}{2}\right) = \frac{i}{a},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{i K'}{2}\right) = \operatorname{nc}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) = \sqrt{\frac{1+k}{k}},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{i K'}{2}\right) = \operatorname{dc}\left(\frac{K'}{2}, k'\right) = \sqrt{k(1+k)}, \quad (k = \alpha^2).$$

On constate bien que $V\left(\frac{i K'}{2}\right)$ est imaginaire pur. Nous ne donnerons pas

d'autre formule pour le calcul de $V(Z)$, la formule (III.20) qui est particulièrement simple (elle ne fait pas intervenir la fonction E), permet le calcul de v sur l'axe OX ; d'autre part, v est nul sur OY .

3.1.2. — ETUDE DU CAS OU LA COUPURE N'EST PAS SYMETRIQUE PAR RAPPORT A OY .

3.1.2.1. — Principe général.

Le cas où le cône étudié n'admet pas le plan Ox_1, x_2 , comme plan de symétrie se ramène aisément au précédent par une représentation conforme, conservant le cercle (C_0) .

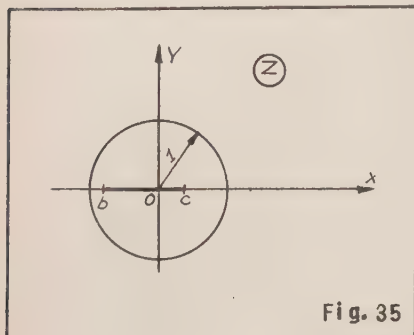


Fig. 35

Supposons, par exemple, que dans le plan Z l'obstacle soit représenté par une coupure le long du segment (b, c) de l'axe réel (voir fig. 35), la transformation conforme :

$$(III.21) \quad Z_1 = \frac{Z - \alpha_1}{1 - \alpha_1 Z},$$

où α_1 est un nombre réel ($|\alpha_1| < 1$), conserve, en définitive, l'axe réel et le cercle (C_0) . Cherchons à déterminer les nombres a_1 et α_1 , tels que $Z = c$ corresponde à $Z_1 = a_1$, $Z = b$ à $Z_1 = -a_1$. On doit écrire :

$$a_1 = \frac{c - \alpha_1}{1 - \alpha_1 c}, \quad -a_1 = \frac{b - \alpha_1}{1 - \alpha_1 b};$$

α_1 est déterminé par l'équation :

$$\frac{c - \alpha_1}{1 - \alpha_1 c} + \frac{b - \alpha_1}{1 - \alpha_1 b} = 0,$$

ce qui donne :

$$\alpha_1 = \frac{1 + bc - \sqrt{(1 - b^2)(1 - c^2)}}{b + c};$$

(remarquons que si $b + c = 0$, $\alpha_1 = 0$).

On déterminera ensuite a_1 par une des deux formules écrites plus haut ou par la formule symétrique par rapport à b et c :

$$a_1 = \frac{\sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - c^2}}{b\sqrt{1 - c^2} + c\sqrt{1 - b^2}} = \frac{bc - 1 + \sqrt{(1 - b^2)(1 - c^2)}}{b - c},$$

relation que l'on peut trouver directement en écrivant :

$$(1, -1, a_1, -a_1) = (1, -1, c, b).$$

En particulier :

$$\frac{1 - a_1^2}{1 + a_1^2} = \frac{\sqrt{(1 - b^2)(1 - c^2)}}{1 - bc}.$$

3.1.2.2.- Problème symétrique.

Il va nous être maintenant très facile d'étudier le cas du problème symétrique (c'est-à-dire celui où w prend la valeur w_0 sur le bord supérieur de la coupure et $-w_0$ sur le bord inférieur).

La formule donnant W en fonction de Z_1 s'écrit [formule (III.8)] :

$$W(Z_1) = -\frac{i w_0}{\pi} \log \left[\frac{a_1 - Z_1}{a_1 + Z_1} \frac{1 - a_1 Z_1}{1 + a_1 Z_1} \right] + w_0 ,$$

d'où :

$$(III.21) \quad W(Z) = -\frac{i w_0}{\pi} \left[\log [(c-Z)(1-Zc)] - \log [(b-Z)(1-Zb)] \right] + w_0 .$$

$V(Z)$ et $U(Z)$ s'obtiennent par les formules de compatibilité :

$$\frac{dV}{dZ} = -\frac{w_0}{\pi} \frac{(Z^2+1)(b-c)(1-bc)}{(c-Z)(1-Zc)(Z-b)(1-Zb)} ,$$

d'où :

$$V(Z) = -\frac{w_0}{\pi} \left[\frac{1+c^2}{1-c^2} \log \frac{c-Z}{1-Zc} - \frac{1+b^2}{1-b^2} \log \frac{Z-b}{1-Zb} \right] ;$$

enfin :

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{2 w_0}{\pi} \frac{(b-c)(1-bc)Z}{(c-Z)(1-Zc)(Z-b)(1-Zb)} ,$$

d'où :

$$(III.23) \quad U(Z) = \frac{2 w_0}{\pi} \left[\frac{c}{(1-c^2)} \log \frac{c-Z}{1-cZ} - \frac{b}{1-b^2} \log \frac{Z-b}{1-bZ} \right] .$$

Naturellement, on aurait pu obtenir ces expressions directement, par un raisonnement analogue à celui déjà fait dans les numéros antérieurs (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6).

Remarquons que ce problème jouit d'une propriété "d'additivité", évidente à priori d'ailleurs, mais qui se trouve nettement en évidence sur les formules [(III.21), (III.22), (III.23)]. Ceci veut dire que, si on connaît la solution du problème pour un segment bc et celle relative à un segment cd , on obtient la solution relative au segment bd , en ajoutant les solutions données. Signalons aussi que, dans les formules précédentes, la détermination des logarithmes doit être convenablement choisie.

3.1.2.3.- Problème portant.

Nous nous contenterons de calculer la fonction $U(Z)$. Posons dans ce paragraphe :

$$k_1 = \frac{1-a_1^2}{1+a_1^2} = \frac{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{1-bc} ;$$

on a :

$$\frac{dW}{dZ_1} = \frac{i w_0 a_1^2 (a_1^2+1)}{E(k_1)} \frac{(Z_1^2-1)^2}{[(a_1^2-Z_1^2)(1-a_1^2 Z_1^2)]^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$\frac{dZ_1}{dZ} = \frac{1-a_1^2}{(1-a_1 Z)^2} ,$$

d'où l'on tire très facilement :

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{2 w_0}{\beta E (k_1)} \frac{\alpha_1^2 (1+\alpha_1^2) (1+c)^3 (1-b)^3}{(1+\alpha_1)^6} \frac{Z (Z^2-1)}{[(c-Z) (Z-b) (1-bZ) (1-cZ)]^{\frac{3}{2}}} .$$

Or, l'égalité :

$$(b, \frac{1}{b}, c, 1) = (-a_1, -\frac{1}{a_1}, a_1, 1)$$

s'écrit :

$$F' = \frac{c-b}{1-bc} = \frac{2 a_1}{1+a_1^2} ,$$

et si l'on forme la combinaison $\frac{(F+1)^3}{F^2}$, on en déduit l'identité :

$$\frac{(1+c)^3 (1-b)^3}{(c-b)^2 (1-bc)} = \frac{(1+\alpha_1)^6}{4 \alpha_1^2 (1+\alpha_1^2)} ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{w_0}{2 \beta E (k_1)} (b-c)^2 (1-bc) \frac{Z (Z^2-1)}{[(c-Z) (Z-b) (1-bZ) (1-cZ)]^{\frac{3}{2}}} ;$$

l'intégration se fait simplement, à l'aide de fonctions élémentaires :

$$(III.24) \quad U(Z) = \frac{w_0}{\beta E (k_1) (1-bc)} \frac{2 bc (Z^2+1) - (b+c) (1+bc) Z}{\sqrt{(c-Z) (Z-b) (1-bZ) (1-cZ)}} .$$

3.1.2.4. - Portance d'une aile Δ

On obtiendra, d'une façon générale, les efforts globaux sur un obstacle par intégration des pressions. Mais le calcul de la portance peut se faire par une formule générale très simple que nous allons établir.

Nous partirons de la formule :

$$C_p = -2 \mathcal{R} [U(Z)] .$$

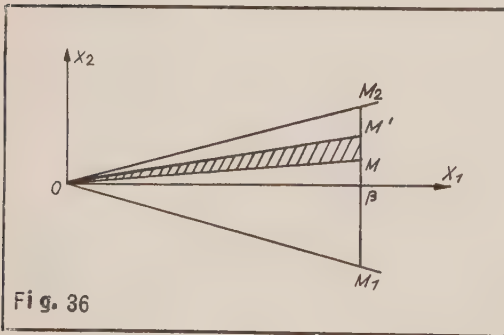


Fig. 36

Considérons un triangle élémentaire OMM' (voir fig. 36); M ayant comme coordonnées $(\beta, x_2, 0)$; son aire est égale à $\frac{\beta dx_2}{2}$.

On a, par définition du C_z :

$$C_z = \frac{-2 \int_{M_1 M_2} C_p dx_2}{\int_{M_1 M_2} dx_2} ,$$

ce qui s'écrit dans le plan z :

$$C_z = \frac{\int_{\mathcal{L}} C_p dz}{\mu - \lambda} ,$$

λ et μ étant les images, dans z , des génératrices limites de l'obstacle, $\mathcal{L}$, le lacet entourant la coupure (λ , μ). Si on désigne par (L) le lacet entourant la coupure bc correspondante, dans le plan Z , on a, puisque :

$$x = \frac{2X}{1+X^2}, \quad (Z = X + iY),$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} C_p dx &= \int_L C_p dx_2 = 2 \int_L C_p \frac{1-X^2}{(1+X^2)^2} dX = -4 \mathcal{R} \left[\int_L U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \right] = \\ &= -4 \mathcal{R} \left[\int_{C'_0} U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \right], \end{aligned}$$

(C'_0) désignant le cercle de rayon 1, modifié au voisinage de i et $-i$ par deux petits arcs $l l'$, $m m'$, afin d'éviter les points singuliers (voir fig. 37); les flèches indiquent le sens de parcours. Le long du cercle (C_0), ($Z = e^{i\theta}$):

$$\frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ = -\frac{2i \sin \theta}{4 \cos^2 \theta} i d\theta = \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} d\theta,$$

et comme :

$$\mathcal{R} [U(Z)] = 0,$$

on en déduit que l'intégrale est nulle, le long des arcs $l l'$, $m m'$; les points $Z = \pm i$ sont des pôles doubles de la quantité qu'il faut intégrer; mais on voit facilement que l'intégrale, le long des arcs de cercle $l l'$ et $m m'$ reste finie. D'une façon précise, si on désigne par R_1 et R_{-1} les résidus de la fonction :

$$U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2},$$

aux points $Z = i$ et $Z = -i$, on a, puisque :

$$\mu - \lambda = \frac{2c}{1+c^2} - \frac{2b}{1-b^2} = \frac{2(c-b)(1-bc)}{(1+b^2)(1+c^2)},$$

$$C_z = +2 \frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(c-b)(1-bc)} \mathcal{R} \left[i \pi (R_1 + R_{-1}) \right];$$

mais :

$$R_1 = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dZ} (Z=i), \quad R_{-1} = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dZ} (Z=-i),$$

d'où :

$$(III.25) \quad C_z = -\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(c-b)(1-bc)} \mathcal{R} \left[i \left[\frac{dU}{dZ} (z=i) + \frac{dU}{dZ} (z=-i) \right] \pi \right].$$

On peut aussi exprimer C_z , en fonction des valeurs de dW/dZ aux points i et $-i$:

$$(III.26) \quad C_z = \frac{\pi (1+b^2)(1+c^2)}{\beta (c-b)(1-bc)} \mathcal{R} \left[i \left[\frac{dW}{dZ} (z=i) - \frac{dW}{dZ} (z=-i) \right] \right];$$

on peut enfin remarquer que :

$$\frac{dW}{dZ(z=i)} = -i \frac{\partial w}{\partial Y}(0,1) ,$$

d'où :

$$(III.27) \quad C_z = \frac{\pi (1+b^2) (1+c^2)}{\beta (c-b) (1-bc)} \left[\frac{\partial w}{\partial Y}(0,+1) - \frac{\partial w}{\partial Y}(0,-1) \right] .$$

Appliquons ce résultat au cas de l'aile Δ portante étudiée au N° 3.1.2.3.

$$\frac{dU}{dZ(z=i)} = -i \frac{w_0}{\beta E(k_1)} \frac{(b-c)^2 (1-bc)}{[(1+b^2)(1+c^2)]^{\frac{3}{2}}} ,$$

d'où :

$$C_z = -\frac{2 \alpha \pi}{\beta E(k_1)} \frac{c-b}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} ,$$

k_1 étant égal à $\frac{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{1-bc}$.

Dans la théorie des ailes, on désigne l'incidence par i et, avec les notations usuelles, on a ici :

$$\alpha = -i ;$$

la formule $C_z(i)$, que nous avons en vue, est la suivante :

$$(III.28) \quad C_z = \frac{2 \pi i}{\beta E(k_1)} \frac{c-b}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} .$$

Dans le cas où $b = -a$, $c = a$, on trouve :

$$C_z = \frac{4 \pi a i}{\beta (1+a^2) E(k_1)} ,$$

ou encore avec les notations de la figure 32 :

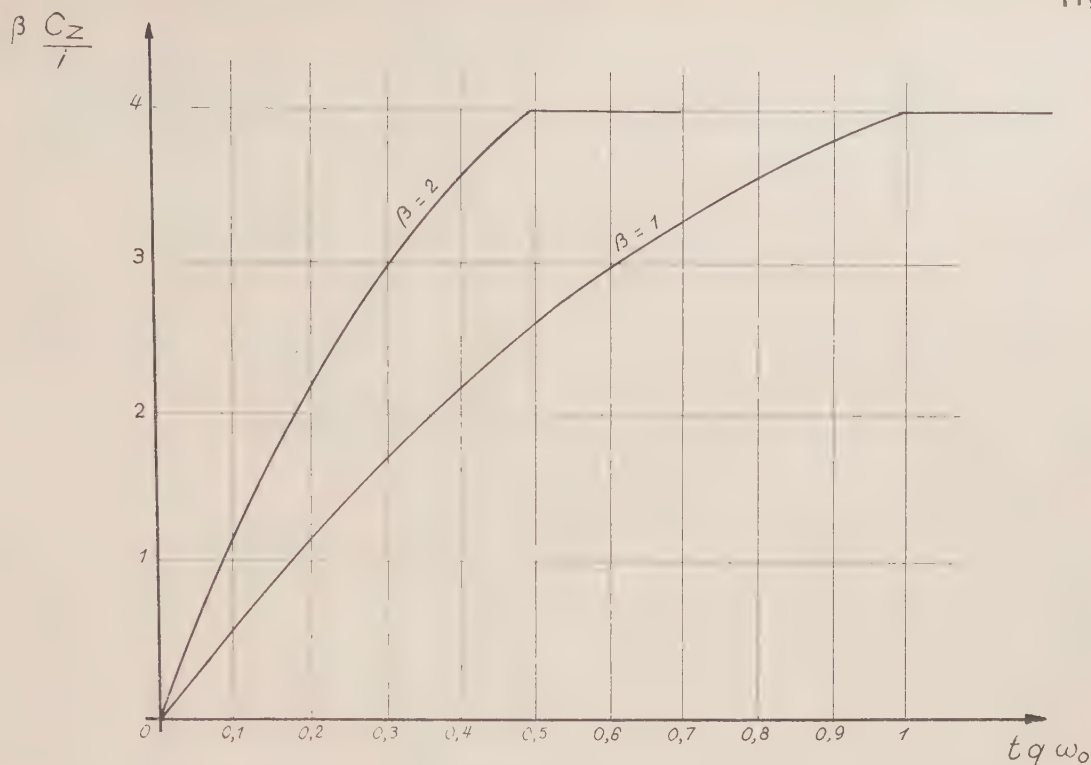
$$(III.29) \quad C_z = \frac{2 \pi \operatorname{tg} \omega_0}{E(\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{tg}^2 \omega_0})} i .$$

On trouvera quelques applications de cette formule figure 38.

Si ω_0 est petit, on retrouve bien le résultat obtenu au numéro 2.2.4. (aux notations près) :

$$C_z = 2 \pi \omega_0 i .$$

Fig. 38



3.1.3.1. — Etude du cas général. —

Jusqu'ici nous n'avons traité que les cas élémentaires, c'est-à-dire ceux pour lesquels la fonction w prenait une valeur constante sur chaque bord de la coupure. Nous allons traiter maintenant, le cas où la fonction w prend, sur le bord supérieur de la coupure, des valeurs données :

$$w = w_1(X) ,$$

et sur le bord inférieur, des valeurs données que nous noterons :

$$w = w_2(X) .$$

Remarquons tout d'abord que la solution du problème général peut toujours être considérée, comme résultat de la superposition des solutions d'un problème purement portant (w prenant la même valeur $\frac{w_1(X) + w_2(X)}{2}$ sur chaque bord de la coupure) et d'un problème purement symétrique (w prenant des valeurs opposées $\pm \frac{w_1(X) - w_2(X)}{2}$ sur chaque bord de la coupure). Nous pourrions donc nous restreindre à ces deux types de problèmes. Nous noterons, en outre, que dans le problème purement symétrique, u prend les mêmes valeurs sur les deux bords de la coupure; il prend, par contre, des valeurs opposées dans le cas d'un problème purement portant.

Une première idée, pour traiter ce problème, consiste à utiliser les solutions

élémentaires trouvées et à les superposer de façon convenable. Par exemple, pour un problème symétrique, considérons une aile élémentaire, d'envergure infiniment petite, dont l'image dans le plan Z est un segment de l'axe réel de longueur ΔX , situé au voisinage du point X , et soit $w = w(X)$ la valeur correspondante de w , les vitesses complexes de cet écoulement sont données par les formules (III.21), (III.22); (III.23); étant données les hypothèses faites, on peut écrire, en désignant par $\Delta U(Z)$, $\Delta V(Z)$, $\Delta W(Z)$ les vitesses complexes :

$$\Delta W(Z) = -\frac{i \cdot w(X)}{\pi} \frac{d}{dX} \left[\log(X-Z)(1-ZX) \right] \Delta X ,$$

$$\Delta V(Z) = -\frac{w(X)}{\pi} \frac{d}{dX} \left[\frac{1+X^2}{1-X^2} \log \frac{X-Z}{1-ZX} \right] \Delta X ,$$

$$\Delta U(Z) = \frac{2 \cdot w(X)}{\pi \beta} \frac{d}{dX} \left[\frac{X}{1-X^2} \log \frac{X-Z}{1-ZX} \right] \Delta X .$$

On est amené à écrire la solution du problème symétrique sous la forme :

$$(III.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(Z) = -\frac{i}{\pi} \int_b^c w(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\log(\xi-Z)(1-Z\xi) \right] d\xi , \\ V(Z) = -\frac{1}{\pi} \int_b^c w(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \log \frac{\xi-Z}{1-Z\xi} \right] d\xi , \\ U(Z) = \frac{2}{\pi \beta} \int_b^c w(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi}{1-\xi^2} \log \frac{\xi-Z}{1-Z\xi} \right] d\xi ; \end{array} \right.$$

les intégrales figurant dans ces formules n'ont de sens que si Z n'est pas sur le segment bc . Si Z est réel et compris entre b et c , il faut les prendre en "partie principale". Pour justifier ces formules, il faut en outre, démontrer que la partie réelle de la fonction $W(Z)$, définie par la première formule (III.30) prend bien la valeur $w(X)$ quand Z est réel ($Z=X$).

Pour cela, on calcule $W(Z)$ en un point de $Z = X + i\eta$, η étant positif et petit, en décomposant l'intégrale figurant dans la première formule (III.30) en trois parties :

$$W(Z) = -\frac{i}{\pi} \left[\int_b^{X-\varepsilon} + \int_{X+\varepsilon}^c + \int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} \right] .$$

Ceci fait, on choisit ε et η de manière à ce que la dernière intégrale soit arbitrairement voisine de la valeur :

$$I = w(X) \int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - Z},$$

ce qui est possible, puisque cette intégrale peut s'écrire :

$$\int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} \frac{w(\xi)(1-Z^2)^2}{(\xi-Z)(1-\xi Z)} d\xi;$$

on peut ensuite, en diminuant, au besoin la borne supérieure fixée pour η , choisir ce dernier nombre pour que :

$$\mathcal{R} \left[-\frac{1}{\pi} \left[\int_b^{X-\varepsilon} + \int_{X-\varepsilon}^c \right] \right]$$

soit arbitrairement petit. Il n'y a aucune difficulté, puisque la quantité sous le signe $\int$ est continue en Z . Enfin I peut être rendu arbitrairement voisin de :

$$i \pi w(X),$$

ce qui montre bien que, si η est suffisamment petit;

$$\mathcal{R} [W(Z)] - w(X)$$

est arbitrairement petit, ce qu'il fallait démontrer.

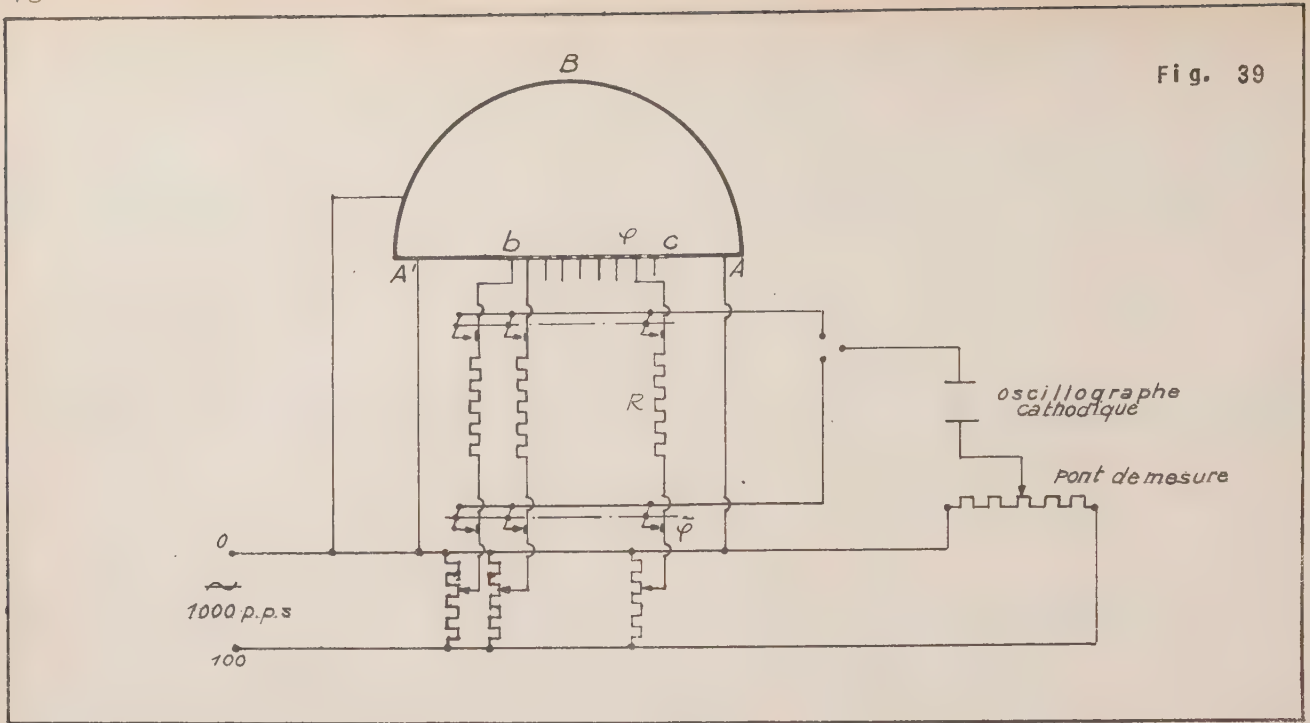
Ce procédé, théoriquement simple, est assez délicat en pratique, car les calculs à faire portent sur des intégrales, à prendre en valeur principale. D'autre part, dans le cas portant, l'application de cette méthode demanderait la résolution préalable d'une équation intégrale d'un type assez compliqué. C'est pourquoi nous préférons donner les méthodes de calcul suivantes; la première utilise les "analogies électriques"; la seconde, purement numérique, ramènera le calcul numérique à celui d'une intégrale de Poisson; or, nous avons donné, au numéro 2.2.7. un procédé simple et précis pour résoudre un tel problème.

3.1.3.2. - Utilisation des "analogies électriques". (1)

L'analogie consiste à identifier la fonction harmonique $w(X,Y)$ avec un potentiel électrique $\varphi(X,Y)$, à travers un conducteur constitué par un liquide occupant un bassin à fond horizontal en forme de demi-cercle (voir fig. 39). Sur la frontière circulaire w est constant, et par suite, la demi-circonférence sera portée à un potentiel constant, potentiel qui pourra être pris comme zéro de l'échelle des potentiels. Cette circonférence sera donc conductrice; (ce demi-cercle n'est autre que la partie du cercle (C_0) du plan Z , pour laquelle $Y > 0$). Sur la coupure bc , représentant le cône obstacle, on dispose des électrodes qui pourront, au moyen de potentiomètres réglables, être portées au potentiel donné φ . Pour préciser les conditions aux limites sur les segments $A'b$ et cA , il faut distinguer le problème symétrique du problème portant.

(1) Pour toutes les questions relatives à l'analogie électrique, se reporter aux mémoires fondamentaux de M. MALAVARD (ref. 25 et 28).

Fig. 39



3.1.3.2.1. — Problème symétrique.

w doit être nul sur des portions de l'axe des X extérieures à la coupure, par conséquent les frontières correspondantes du bassin sont portées au potentiel zéro, c'est-à-dire au même potentiel que la demi circonférence $A'B$; w est donc donné directement par un problème de Dirichlet pur. Mais l'inconnue de notre problème est la valeur de la pression, le long du segment bc , c'est-à-dire u .

Or u est lié à w par les relations de compatibilité qui permettent d'écrire sur l'axe des X :

$$\beta \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{2X}{1-X^2} \frac{\partial w}{\partial Y},$$

$\partial w / \partial Y$ étant proportionnel à l'intensité rentrant, dans le bassin par les électrodes, quantité qu'il est facile de mesurer par un montage convenable⁽¹⁾. Connaissant ainsi la valeur de $\partial u / \partial X$ il nous faut, en outre, pour obtenir la répartition de pression cherchée, déterminer une valeur de u , le long de bc par exemple celle au point O ⁽²⁾. Or sur l'axe OY on peut écrire :

$$\beta \frac{\partial u}{\partial Y} = - \frac{2Y}{1+Y^2} \frac{\partial w}{\partial Y};$$

(1) On pourra, par exemple, alimenter les électrodes de la coupure à travers des résistances R , assurant une chute de potentiel de $\bar{\varphi}$ en φ (voir fig. 39). Dans ces conditions, on a une relation de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial X} = k(X) (\bar{\varphi} - \varphi),$$

$k(X)$ étant une fonction qui dépend des résistances choisies, et de la résistivité de la cuve, mais qu'il est toujours facile d'obtenir; la manipulation à faire est alors la suivante; les résistances R étant bien déterminées, choisir les valeurs de $\bar{\varphi}$, pour obtenir, sur les électrodes, les valeurs de φ données par les conditions aux limites.

(2) Nous supposons que le point O est sur la coupure. Dans le cas contraire le procédé indiqué ici peut se modifier très facilement.

$u(X,Y)$ étant nul au point B (0,1) :

$$\beta u(0) = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \frac{\partial w}{\partial Y}(0,t) dt = \left[\frac{2Y}{1+Y^2} w(0,t) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 w(0,t) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

D'où :

$$(III.31) \quad \beta u(0) = -2 \int_0^1 w(0,t) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

On connaîtra $u(0)$ par une simple intégrale, si l'on connaît la répartition des w (celle des φ) sur l'axe OY. Or ceci peut se déterminer très facilement, le problème est donc entièrement résolu.

3.1.3.2.2. - Problème portant.

Les conditions aux limites à réaliser pour le problème portant sont les mêmes que pour le problème symétrique, en ce qui concerne la demi-circonférence A'B A et la coupure b,c . Sur les segments A'b et c A, il faut naturellement écrire :

$$\frac{\partial w}{\partial Y} = \frac{d.w}{d.n} = 0,$$

c'est-à-dire que les parois correspondantes seront des parois isolantes.

Mais ceci est insuffisant. Si on ne prend pas de précaution, la fonction harmonique correspondant au champ électrique ainsi réalisé ne sera pas une solution du problème aérodynamique posé. En effet, il n'y a aucune raison pour que le gradient de ce potentiel soit nul aux points A et A', car l'intensité en A et A', en général, n'est pas nulle. La fonction dW/dZ correspondante n'étant pas nulle en $Z = \pm 1$, nous avons déjà fait remarquer que ceci conduit à des singularités inadmissibles pour $U(Z)$; (voir N° 3.1.1.1.).

L'examen du problème élémentaire portant, admettant OY comme axe de symétrie, va nous permettre de mieux situer la difficulté et de la résoudre. Si on réalise au bassin les conditions aux limites précédentes en portant les électrodes de la coupure $(-a, +a)$ à un potentiel constant, il est bien évident que le potentiel ainsi réalisé dans le bassin, restera fini en tout point du champ même en A et A'. Or on obtient une solution en prenant pour $\varphi(X,Y)$, la partie réelle de la fonction analytique $F(Z)$, définie par :

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{i \lambda}{\left| (a^2 - Z^2) (1 - a^2 Z^2) \right|^{1/2}},$$

λ étant une constante réelle.

Cette solution ne correspond pas à la solution du problème aérodynamique (voir N° 3.1.7.), qui, elle, donne une singularité en $(a^2 - Z^2)^{-1/2}$, pour la fonction $W(Z)$, aux environs de $Z = \pm a$. Il s'en suit que $w(X,Y)$ doit être infiniment grand en des points voisins de $+a$ et $-a$ ⁽¹⁾. Il faut donc tenir compte de cette particularité dans le montage.

(1) On rencontre là un exemple intéressant de précaution à prendre dans un problème donné lorsqu'on applique le principe des singularités minimum. Ce principe nous a conduit à poser, pour

Or, ce n'est pas la première fois que l'on rencontre des problèmes d'analogie avec singularités ⁽²⁾. On sait qu'il faut alors réaliser, aux environs des points $\pm a$, un modèle matériel, partiellement conducteur et partiellement isolant, schématisant la disposition d'une ligne équipotentielle électrique et d'une ligne de courant.

Dans le cas qui nous intéresse, aux environs du point $X = +a$, on a :

$$W(Z) = \frac{K}{\sqrt{Z-a}},$$

K étant une constante réelle et, par conséquent, si on pose :

$$W(Z) = w(X, Y) + i \cdot w'(X, Y),$$

$$Z - a = \zeta = s e^{i\sigma},$$

et :

$$w + i w' = \frac{K}{\sqrt{s}} \left[\cos \frac{\sigma}{2} - i \cdot \sin \frac{\sigma}{2} \right],$$

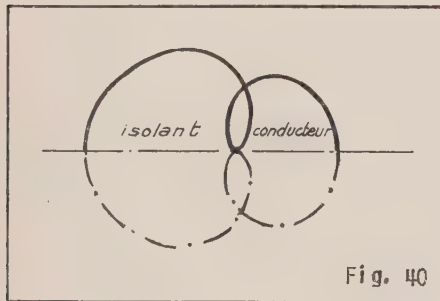
les lignes $w = \text{constante}$ sont déterminées par :

$$s = s_0 \cos^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{s_0 (1 + \cos \sigma)}{2},$$

et les lignes $w' = \text{constante}$ par :

$$s = s_1 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{s_1 (1 - \cos \sigma)}{2},$$

s_0 et s_1 étant deux constantes positives. Ce sont donc des cardioides, ayant la disposition donnée par la figure 40. On trouve également, sur cette figure, le schéma de la singularité qu'il faut placer en b et c . La manipulation est alors la suivante : la circonférence ABA' étant portée au potentiel zéro et les conditions aux limites étant réalisées le long de la coupure bc , on porte la partie conductrice des deux singularités à des potentiels assez élevés qui doivent être déterminés pour que l'intensité aux points A et A' soit nulle (naturellement, si le problème présente l'axe OY, comme axe de symétrie, les deux singularités doivent être portées au même potentiel, et la nullité de l'intensité en A assurera celle de l'intensité en A'). Ceci, du point de vue pratique, se réalisera en



séparant en A (et éventuellement en A'); sur la demi-circonférence, une petite électrode qui ne sera pas alimentée et dont on opposera le potentiel au potentiel du reste de la circonférence, à travers un appareil de zéro. C'est cette condition

... notre problème aérodynamique, une solution pour dW/dZ en $(a^2 - Z^2)^{-3/2}$. Mais lorsqu'on fait l'analogie, le bassin électrique n'a aucune raison, a priori, de savoir que l'on veut réaliser des conditions autres que celles portant directement sur $W(Z)$. Il "applique" donc le principe des singularités minimum, en réalisant la solution pour dW/dZ en $(a^2 - Z^2)^{-1/2}$.

(2) Voir, par exemple, les références 27 et 28. Depuis plusieurs mois, également, le laboratoire d'analogies électriques de l'O.N.E.R.A. utilise des singularités pour l'étude des écoulements compressibles subsoniques, dans le plan de l'hydrographie.

qui permet la détermination du potentiel auquel il faut porter la partie conductrice de la singularité en c , (et éventuellement en b). Le champ $\varphi(X,Y)$ réalisé dans la cuve, sera alors en vertu du principe des "singularités minimum", proportionnel au champ $w(X,Y)$ de la composante de la vitesse suivante Ox_3 .

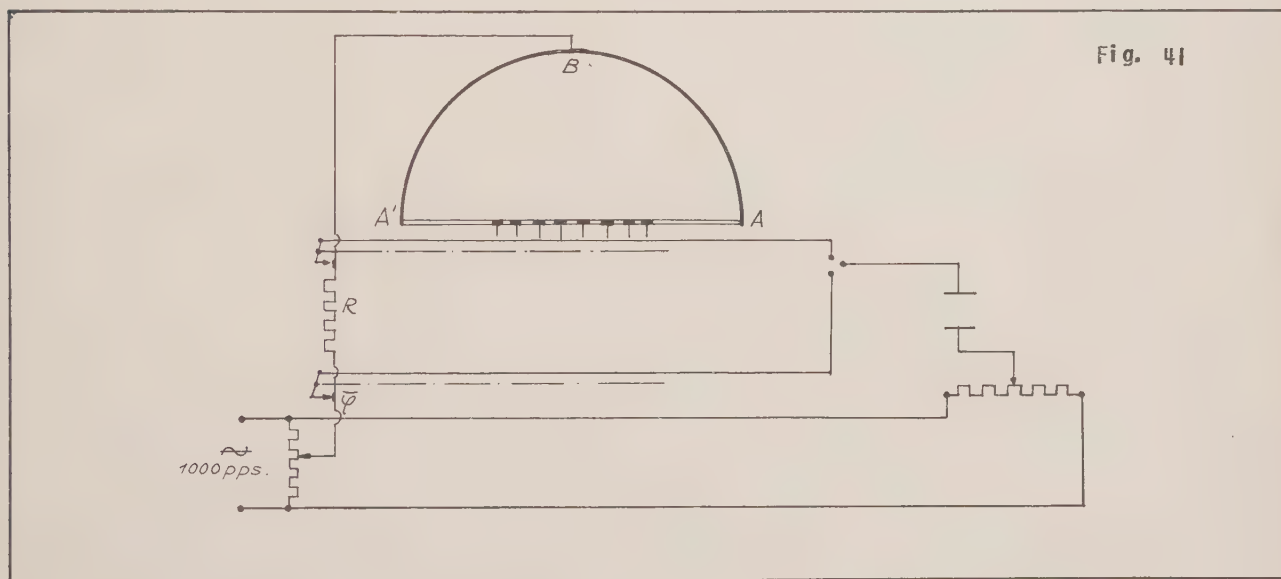
Ceci fait, la manipulation se déroule comme pour le cas symétrique. On mesure les intensités, le long de la coupure (b,c), ce qui fournit les valeurs dw/dX . On détermine la valeur de u au point O en relevant le champ des valeurs de w le long de OY , et en appliquant la formule (III.31).

3.1.3.2.3. - Mesure électrique du C_z dans le cas du problème portant.

Dans tous les cas, les efforts globaux peuvent se déterminer par intégration. Toutefois, dans le cas d'un problème portant, on aura une vérification supplémentaire, en utilisant la formule (III.27) que nous écrirons :

$$C_z = \frac{2\pi}{\beta} \frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(c-b)(1-cb)} \frac{\partial w}{\partial Y}(0,1) .$$

En effet, cette dernière formule permet d'avoir directement le C_z , par une simple mesure électrique, donnant l'intensité rentrant au point B , car $dw/dY(0,1)$ est proportionnel à cette intensité. A cet effet, il suffit de détacher, aux environs de B , une petite électrode (fig. 41), et de l'alimenter par l'intermédiaire d'une résistance R arbitraire. Toutes les conditions aux limites étant satisfaites, il suffit de régler φ pour que le potentiel en B soit nul, comme sur le reste du demi-cercle. Le C_z est alors proportionnel à $\bar{\varphi}$.



3.1.3.2.4. - Applications.

Le schéma du montage utilisé est donné par la figure 39. Il n'est pas question, ici, de donner les détails opératoires, les précautions prises pour augmenter la précision, la détermination des échelles et la réduction des expériences. Ceci fera l'objet d'un exposé ultérieur.

Nous donnons simplement ici les résultats des premières expériences faites suivant ces principes ⁽¹⁾. Dans chacun des cas étudiés, nous avons traité le
(voir renvoi 1 page 82 .../

cas élémentaire portant et le cas élémentaire symétrique, ce qui permet une vérification du procédé.

1) Problème élémentaire symétrique $a = 0,6$, $w_0 = 1$.

Désignons par C_{p_0} le coefficient de pression correspondant :

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,585
C_{p_0} expérimental	1,204	1,214	1,248	1,306	1,400	1,518	1,692	1,946	2,340	3,140	5,160
C_{p_0} théorique	1,219	1,230	1,262	1,318	1,402	1,524	1,694	1,946	2,336	3,072	4,640

2) Problème symétrique : cas d'un cône lenticulaire. Si la section $x_1 = \beta$ du cône obstacle donné est formé de deux arcs de parabole :

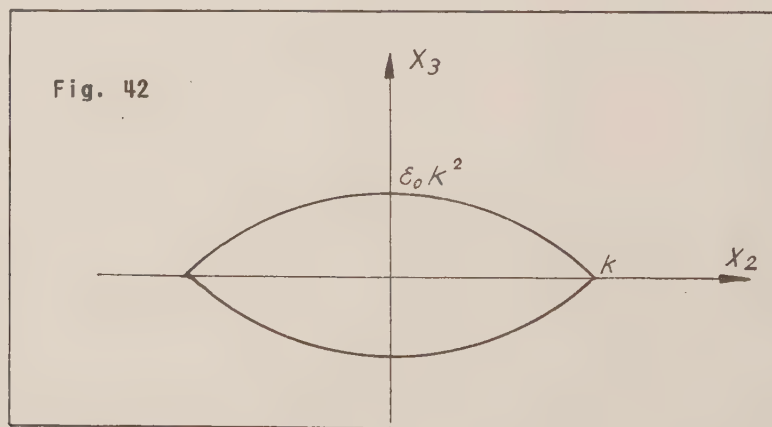
$$x_3 = \pm \varepsilon_0 (k^2 - x_2^2) ,$$

ε_0 étant un nombre positif petit (voir figure 42) la fonction $w(X,Y)$ doit prendre, sur la coupure, les valeurs :

$$w = \varepsilon_0 (k^2 + x^2) ;$$

rappelons que :

$$k = \frac{2a}{1+a^2} , \quad x = \frac{2X}{1+X^2} ;$$



on peut écrire le coefficient de pression :

$$C_{p_1} = \varepsilon_0 P_1(X) .$$

(1) Il y a tout lieu de penser que la précision obtenue déjà satisfaisante, pourra être améliorée, en employant un matériel mieux adapté que celui qui a été utilisé. Ces expériences ont été faites en utilisant souvent des montages de fortune avec le matériel existant au laboratoire.

Les résultats trouvés ont donné, pour $a = 0,6$:

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,585
$P_1(X)$	1,111	1,112	1,117	1,133	1,181	1,285	1,491	1,849	2,472	3,770	8,02

A titre de vérification, on a étudié également le cas où la répartition de w le long de l'axe des X, était donné par :

$$w = \varepsilon_0 (k^2 - x^2) .$$

Les valeurs trouvées pour le C_p correspondant ont été les suivantes ;

on a posé :

$$C_p = \varepsilon_0 P_2(X)$$

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,585
$P_2(X)$	0,777	0,793	0,843	0,917	1,204	1,088	1,157	1,195	1,183	1,099	0,934

naturellement, on doit vérifier que $P_1(X) + P_2(X)$ et $2k^2(C_{p_0})$ prennent les mêmes valeurs. Or on a :

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,585
$P_1 + P_2$	1,987	1,905	1,961	2,050	2,185	2,373	2,648	3,043	3,655	4,877	8,96
$2k^2 C_{p_0}$	1,999	1,915	1,965	2,052	2,183	2,373	2,638	3,030	3,637	4,783	7,23

3) Problème élémentaire portant $w_0 = 1$, $a = 0,6$:

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54
$C_{p \text{ exp.}}$	1,196	1,208	1,242	1,304	1,398	1,536	1,742	2,062	2,536	3,776
$C_{p \text{ théo.}}$	1,192	1,204	1,238	1,298	1,390	1,526	1,724	2,030	2,552	3,732

4) Problème portant : cône parabolique $w = \varepsilon_0 (k^2 + x^2)$;

on posera $C_{p_3} = \varepsilon_0 P_3(X)$.

X	0	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54
$P_3(X)$	1,068	1,070	1,074	1,094	1,152	1,278	1,520	1,956	2,732	4,636

3.1.3.3. - Méthodes purement numériques. Utilisation du plan z .

Nous avons introduit ce plan au numéro (1.2.5.). Rappelons que z correspond à Z par la transformation conforme :

$$z = \frac{2Z}{Z^2 + 1} ,$$

et que, dans ce plan, les relations de compatibilité s'écrivent :

$$(III.26.) \quad -\beta dU = z. dV = \frac{-iz}{\sqrt{1-z^2}} dW .$$

Un des avantages du plan z , intéressant dans la pratique est que l'on a (si $z = x + iy$) sur l'axe réel :

$$x = x_2 ,$$

x_2 étant l'ordonnée d'un point de la section $x_1 = \beta$, situé sur $x_3 = 0$, dans le système d'axes $Ox_1x_2x_3$.

Certaines des formules établies précédemment, s'écrivent plus simplement. Par exemple, si l'on désigne par (λ, μ) l'image dans z de la coupure (b, c) du plan Z , la formule (III.21) s'écrit :

$$(III.32.) \quad W(z) = -i \frac{w_0}{\pi} \log \frac{\mu - z}{\lambda - z} .$$

$W(z)$ se présente donc comme étant le potentiel complexe dû à deux tourbillons placés au point λ et μ et d'intensité opposée. De même, la formule (III.24) peut s'écrire :

$$(III.33.) \quad U(z) = \frac{w_0}{\beta E(k_1)} \frac{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}{1-bc} \frac{2\lambda\mu - z(\lambda + \mu)}{\sqrt{(\mu - z)(z - \lambda)}} .$$

Si on pose :

$$\lambda = \cos \psi , \quad \mu = \cos \omega ,$$

ψ et ω étant compris entre 0 et π :

$$k_1 = \frac{\sqrt{\sin \psi \sin \omega}}{\sin \frac{\psi + \omega}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}{1-bc} = \frac{1}{\sin \frac{\psi + \omega}{2}} .$$

Dans le cas où $\mu = -\lambda = k$ on a, en particulier :

$$C_p = \frac{2k^2}{\beta E'(k)} \frac{w_0}{\sqrt{k^2 - x^2}} ;$$

rappelons que :

$$E'(k) = E(\sqrt{1-k^2}) .$$

3.1.3.3.1. - Cas du problème symétrique.

Soit donc à résoudre le problème correspondant aux conditions aux limites $w = f(x)$, sur le bord supérieur de la coupure, $w = -f(x)$ sur le bord inférieur.

La formule (III.32) nous conduit à représenter $W(z)$ comme le potentiel d'une répartition de tourbillons portés par le segment $\lambda \mu$, par suite :

$$W(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{f(u)}{u-z} du.$$

En un point x du bord supérieur de la coupure, on a en effet :

$$W(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{f(u)}{u-x} du + f(x) = w + i w',$$

l'intégrale étant prise en valeur principale.

Posons sur la coupure :

$$x = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\mu - \lambda}{2} \cos \varphi, \quad u = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\mu - \lambda}{2} \cos \theta,$$

$$f(u) = F(\theta).$$

Supposons, pour commencer, que :

$$F(0) = F(\pi) = 0,$$

et que $F(\theta)$ soit développable en série de Fourier :

$$F(\theta) = \sum_0^{\infty} A_n \sin n \cdot \theta, \quad 0 < \theta < \pi;$$

alors :

$$w'(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left(\sum_0^{\infty} A_n \sin n \cdot \theta \right) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta.$$

Admettons en outre, que l'on puisse intervertir les signes $\sum$ et $\int$. D'après un résultat connu (réf. 13 p. 270) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin n \cdot \theta \cdot \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[\cos (n-1) \cdot \theta - \cos (n+1) \cdot \theta]}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \\ &= -\frac{[\sin (n-1) \cdot \varphi - \sin (n+1) \cdot \varphi]}{2 \sin \varphi} = \cos n \cdot \varphi, \end{aligned}$$

et par suite :

$$w'(\varphi) = \sum_0^{\infty} A_n \cos n \cdot \varphi.$$

On voit ainsi que $w'(\theta)$ est la fonction conjuguée de $F(\theta)$, ce qui pouvait s'établir facilement par d'autres voies.

Mais d'après la relation de compatibilité :

$$-\beta \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w'}{\partial x},$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = - \frac{x}{\beta \sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w'}{\partial \varphi} = \frac{x}{\beta \sqrt{1-x^2}} \sum_0^{\infty} n \cdot A_n \sin n \cdot \varphi ;$$

posons :

$$(III.34) \quad G(\varphi) = - \sum_0^n n \cdot A_n \sin n \cdot \varphi ,$$

$G(\varphi)$ est la dérivée de la fonction conjuguée de $F(\varphi)$. On a donc :

$$(III.35) \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{x G(\varphi)}{\beta \sqrt{1-x^2}} .$$

La connaissance de $F(\varphi)$ entraîne celle de $G(\varphi)$ par un calcul d'opérateur trigonométrique (numéro 2.3.3.), et, par suite, celle de $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$. Pour établir la for-

mule (III.35), nous avons fait un certain nombre d'hypothèses. Ces hypothèses seront satisfaites si la dérivée de F par rapport à φ satisfait à une condition de Cauchy Lipschitz.

Pour calculer la pression, en chaque point du cône, il faut intégrer la formule (III.35), mais pour cela, il faut connaître la constante d'intégration.

La détermination précise de la fonction u sera facile à obtenir, lorsque nous aurons approfondi la nature de la fonction $U(z)$. Nous supposons d'abord :

$$-\lambda = \mu .$$

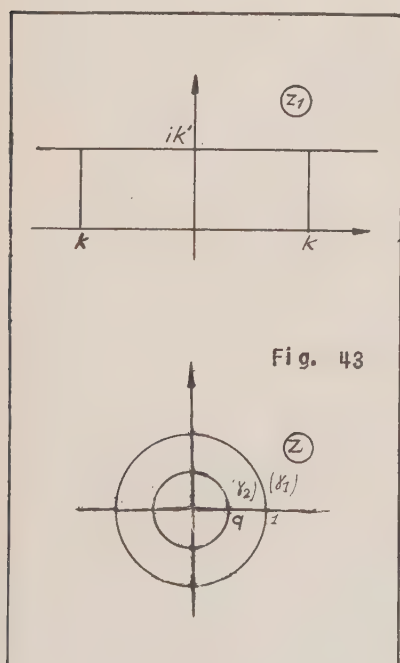
Pour étudier la fonction U , nous allons effectuer la transformation conforme du plan z , muni des coupures $(-\infty, -1)$, $(-\mu, +\mu)$, $(1, +\infty)$ tracées sur l'axe réel, sur une couronne annulaire. Ceci est immédiat (voir, par exemple, le numéro 3.1.7.1). Soit d'abord z_1 une variable complexe définie par :

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{1}{\sqrt{(\mu^2 - z^2)(1 - z^2)}} , \quad \text{ou :}$$

$$z = \mu \operatorname{sn}(z_1, \mu) , \quad (k=\mu) , \quad \text{puis :}$$

$$z_2 = e^{\frac{i\pi}{2k}(iK' - z_1)} .$$

Fig. 43



Le plan z muni de ses coupures se trouve alors représenté sur une bande $0 < \Im(z_1) < K'$ du plan z_1 , et sur une aire annulaire du plan z_2 (voir figure 43) limitée par les circonférences (Y_1) de rayon 1 et (Y_2) de rayon :

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{2k}} .$$

Or, dans le plan z_2 , U est de la forme :

$$U(z_2) = A \log z_2 + f(z_2) ,$$

$f(z_2)$ étant une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur de la couronne [voir par exemple N° 2.1.2.1.], puisque $U(z_2)$ est fini, même aux points images de $z = \pm \mu$, en raison de l'hypothèse :

$$F(0) = F(\pi) = 0.$$

Remarquons que, sur le cercle (γ_1) , $f(z_2)$ a une partie réelle nulle. Supposons connue la valeur du coefficient A ; sur la circonférence (γ_1) , $A \log z_2$ garde comme partie réelle constante :

$$(III.36) \quad A \log q' = -\frac{\pi}{2} \frac{K'}{K} A.$$

Or, d'après un théorème bien connu de la théorie des fonctions harmoniques, (voir ref.29), on sait que, si une fonction harmonique, uniforme $H(x, y)$, définie à l'intérieur d'une couronne circulaire, prend sur les deux cercles frontières, les valeurs $\varphi_0(\theta)$ et $\varphi_1(\theta)$, θ étant l'angle au centre représentant le point courant sur chaque cercle, on a :

$$\int_0^{2\pi} \varphi_0(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) d\theta.$$

Ce théorème va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THEOREME : Si $\mu = -\lambda$, la fonction $u(\varphi)$ satisfait à l'égalité :

$$\int_0^\pi \frac{u(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \cos^2 \varphi}} = 2 K(\mu) A \log q',$$

$K(\mu)$ étant la fonction elliptique de première espèce relative au module μ :

$$K(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \cos^2 \varphi}}.$$

En effet, la valeur moyenne de la partie réelle de $f(z_2)$ sur le cercle (γ_1) doit être nulle, or la valeur moyenne de u sur (γ_2) s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \frac{dz_2}{iz_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2K} \int_0^{4K} u dz_1 = \frac{1}{4K} \int_{\mathcal{L}} u \frac{dz}{\sqrt{(\mu^2 - z^2)(1 - z^2)}},$$

en désignant par $\mathcal{L}$ le lacet entourant la coupure $(-\mu, +\mu)$, dans le sens direct. Mais la fonction $u(\varphi)$ prend les mêmes valeurs, en des points ayant même abscisse sur le bord supérieur et sur le bord inférieur de la coupure, par suite cette valeur moyenne est égale à :

$$\frac{1}{2K} \int_0^\pi \frac{u(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Pour que la valeur moyenne de $f(z)$, sur (γ_2) soit nulle, il faut et il suffit que celle de u soit égale à $A \log q$; ce qui justifie le théorème. On utilise ce théorème de la façon suivante :

Soit $u_0(\varphi)$, une primitive de $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, calculée par la formule (III.35), si :

$$\frac{1}{2K} \int_0^\pi \frac{u_0(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \cos^2 \varphi}} = C,$$

la valeur de $u(\varphi)$ cherchée peut s'écrire :

$$u(\varphi) = A \log q + u_0(\varphi) - C.$$

Pour établir ce résultat, nous avons supposé que la coupure s'étendait sur le segment $(-\mu, +\mu)$, symétrique par rapport à l'origine. Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de faire une représentation conforme analogue à celle déjà faite au numéro 3.1.2. Soit :

$$z' = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

cette représentation conforme faisant correspondre à la coupure (λ, μ) du plan z , la coupure $(-k, +k)$ du plan z' . On a, en particulier :

$$k = \frac{1 - \lambda\mu - \sqrt{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}}{\mu - \lambda}.$$

La valeur moyenne de u sur le cercle image de la coupure $(-k, +k)$, du plan z' , dans la représentation conforme qui transforme le plan z' en un anneau, s'écrit d'après ce que nous venons de voir :

$$\frac{1}{4K(k)} \int_{\mathcal{L}'} \frac{u dz'}{\sqrt{(k^2 - z'^2)(1 - z'^2)}},$$

en désignant par $\mathcal{L}'$ le lacet entourant la coupure $(-k, +k)$ dans le plan z' .

Mais :

$$dz' = \frac{dz(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)^2},$$

$$\sqrt{(k^2 - z'^2)(1 - z'^2)} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha z)^2} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha\lambda)(1 - \alpha\mu)}} \sqrt{(1 - z^2)(\mu - z)(z - \lambda)}.$$

Remarquons que :

$$\sqrt{\frac{(1 - \alpha\lambda)(1 - \alpha\mu)}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{2k}}.$$

La valeur moyenne s'écrit alors :

$$\frac{1}{4K(k)} \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{2k}} \int_{\mathcal{L}} \frac{u dz}{\sqrt{(1 - z^2)(\mu - z)(z - \lambda)}},$$

$\mathcal{L}$ étant le lacet entourant dans le sens direct la coupure (λ, μ) .

Posons enfin :

$$z = \frac{\mu + \lambda}{2} + \frac{\mu - \lambda}{2} \cos \varphi ,$$

la valeur moyenne cherchée sur le bord supérieur de la coupure s'écrit :

$$\frac{1}{2K(k)} \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{2k}} \int_0^\pi \frac{u(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - z^2}} .$$

On en conclut, comme précédemment :

Si $u_0(\varphi)$ est une primitive calculée à partir de (III.35), et si :

$$\frac{1}{2K(k)} \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{2k}} \int_0^\pi \frac{u(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - z^2}} = C ,$$

la valeur de $u(\varphi)$ cherchée est :

$$(III.37) \quad u(\varphi) = u_0(\varphi) + A \log q + C .$$

Tout revient donc au calcul de la constante A. Or cette constante se calcule très facilement en considérant la partie imaginaire $u'(x, y)$ de $U(z)$.

En effet :

Lorsque, dans le plan z , on entoure une fois dans le sens direct de la coupure (λ, μ) , la partie imaginaire de $U(z)$ augmente de $-2\pi A$. Si on entoure la coupure par le lacet $\mathcal{L}$, on remarque que $u'(x, y)$ prend des valeurs opposées aux deux points de la coupure, ayant même abscisse, mais situés sur des bords différents. On peut donc écrire :

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{\partial u'}{\partial x} dx ,$$

mais, d'après les relations de compatibilité, on peut aussi écrire :

$$(III.38) \quad A = \frac{1}{\beta \pi} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w}{\partial x} dx ,$$

ce qui permet directement le calcul de A, à partir de la fonction :

$$w = f(x)$$

donnée sur la coupure.

Toute l'analyse précédente suppose que $f(x)$ s'annule pour $x = \lambda$ et $x = \mu$. Il nous reste maintenant à ramener le cas général à ce cas particulier. Or on peut poser :

$$f(x) = f_0(x) + C_0 + C_1 x ,$$

$f_0(x)$ s'annulant pour $x = \lambda$ et $x = \mu$, et C_0 et C_1 étant deux constantes convenablement choisies. Le problème alors peut se ramener à la superposition de trois problèmes, le premier où :

$$w(x) = f_0(x) ,$$

le second où :

$$w(x) = C_0 ,$$

le troisième où :

$$w(x) = C_1 x .$$

Les deux premiers problèmes ayant déjà été traités, il ne nous reste plus qu'à traiter le dernier problème. Posons donc :

$$f(x) = x ,$$

et cherchons la fonction $U(z)$.

$$W(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{t}{t-z} dt = -\frac{i}{\pi} (\mu-\lambda) - \frac{i}{\pi} z \log \frac{\mu-z}{\lambda-z} ;$$

d'où :

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{i}{\pi} \log \frac{\mu-z}{\lambda-z} - \frac{i}{\pi} (\mu-\lambda) \frac{z}{(\mu-z)(\lambda-z)} ,$$

et d'après (I.26) :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{\pi \beta} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \left[\log \frac{\mu-z}{\lambda-z} + \frac{(\mu-\lambda)z}{(\mu-z)(\lambda-z)} \right] ,$$

d'où par intégration (en déterminant la constante d'intégration pour que $U(1)$ ait une partie réelle nulle) :

$$U(z) = -\frac{1}{\beta \pi} \sqrt{1-z^2} \log \frac{\mu-z}{\lambda-z} + \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \log \frac{1-\mu z + \sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2)}}{\mu-z} ,$$

(III.39)

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \log \frac{1-\lambda z + \sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2)}}{\lambda-z} .$$

En résumé, pour calculer numériquement les pressions, dans un problème symétrique, il faut effectuer les opérations suivantes :

- 1) Se ramener au cas où $w(x)$ s'annule pour $x = \lambda$ et $x = \mu$, suivant le procédé qui vient d'être exposé.
- 2) Calculer les constantes A [formule (III.38)] et q [formule (III.36)] .
- 3) Calculer la fonction $G(\varphi)$ par un opérateur trigonométrique.
- 4) Calculer $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ [formule (III.35)] et une primitive $u_0(\varphi)$.
- 5) Calculer :

$$C = \frac{1}{2 K(\mu)} \int_0^{\pi} \frac{u_0(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \cos^2 \varphi}} ;$$

$u(\varphi)$ est alors donné par la formule (III.37).

Exemple : En appliquant ce procédé au calcul du cas du cône parabolique où

$$w = \pm \varepsilon_0 (k^2 + x^2), \quad C_p = \varepsilon_0 p_1(\varphi),$$

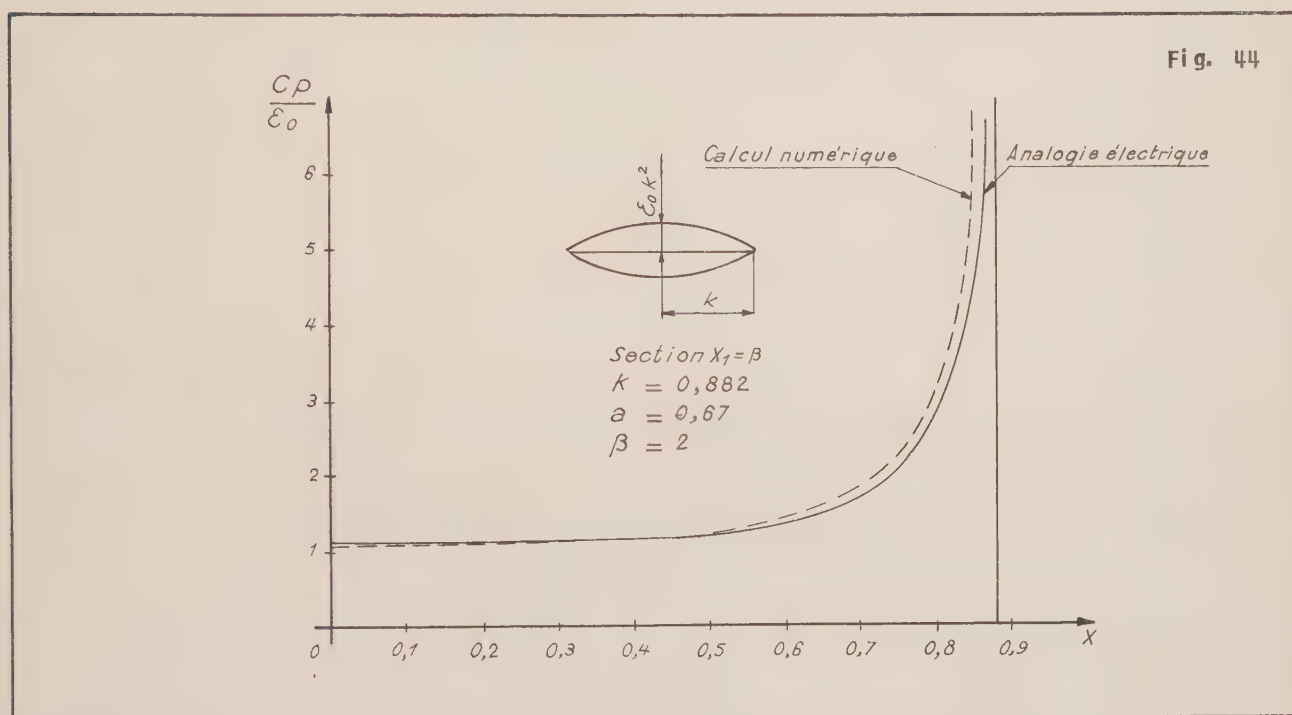
on a trouvé la répartition des C_p suivante :

φ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$p_1(\varphi)$	∞	6,840	2,535	1,524	1,196	1,102	1,088

Pour comparer avec les résultats de l'analogie électrique, il faut se rappeler que :

$$x = \frac{2X}{1+X^2};$$

la comparaison est donnée par la figure 44.



3.1.3.3.2. - Etude du problème portant. -

Nous nous limiterons, pour simplifier, au cas où le problème admet le plan Ox_1x_3 , comme plan de symétrie.

Considérons la fonction $W(z)$; on peut la mettre sous la forme :

$$W(z) = A W_0(z) + F(z),$$

$W_0(z)$ étant la solution en W du problème portant élémentaire (pour lequel $w_0=1$); A une constante réelle et $F(z)$ une fonction qui reste finie dans le domaine où est définie $W(z)$. Nous poserons le long de la coupure :

$$F(z) = f(x) + i f'(x);$$

posons de même :

$$U(z) = A \cdot U_0(z) + G(z) ,$$

$G(z)$ étant la valeur de $U(z)$ correspondant au cas où $W(z) = F(z)$.

Nous désignerons par $g(x)$ et $g'(x)$ les parties réelles et imaginaires de la fonction $G(z)$, sur la coupure.

S'il on remarque que, le long de la coupure :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} ,$$

on voit que les relations de compatibilité permettent d'écrire :

$$\beta \frac{\partial g}{\partial y} = -\beta \frac{\partial g'}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w}{\partial x} ;$$

$w(x)$ étant la fonction donnée par hypothèse ;

d'où :

$$\frac{\partial g'}{\partial x} = \frac{x}{\beta \sqrt{1-x^2}} \frac{\partial w}{\partial x} .$$

Supposons que $\frac{\partial w}{\partial x}$ soit borné, on peut envisager le développement en série trigonométrique de $dg'/d\varphi$, sous la forme :

$$(III.40) \quad \frac{dg'}{d\varphi} = \sum A_n \sin n \cdot \varphi .$$

Or, $G(z)$ peut être envisagé comme le potentiel d'une répartition tourbillonnaire portée par la coupure (en particulier la partie réelle de $U(z)$ est nulle sur l'axe réel en dehors de la coupure).

Considérons une répartition tourbillonnaire d'intensité :

$$g(\varphi) = \sum B_n \sin n \cdot \varphi .$$

La valeur de $dg'/d\varphi$ sera identique à celle écrite dans la formule (III.40), si et seulement si :

$$-n \cdot B_n = A_n ,$$

comme cela résulte de calculs très simples, déjà effectués au numéro précédent.

On en déduit donc la valeur de $g(\varphi)$ correspondant à $dg'/d\varphi$, défini par la formule (III.40), par un opérateur trigonométrique dont le calcul numérique résulte des considérations développées au numéro 2.3.3. du chapitre 2.

On peut aussi simplement calculer d'abord :

$$(III.41) \quad \frac{dg}{d\varphi} = -\sum_1^{\infty} A_n \cos n \cdot \varphi ,$$

par une intégrale de Poisson, et ensuite en déduire $g(\varphi)$ par simple intégration en remarquant que :

$$g(\varphi) = 0 \quad \text{pour} \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi.$$

Le problème sera donc entièrement résolu lorsque nous aurons calculé la constante A. On peut, comme précédemment, poser :

$$F(z_2) = B \log z_2 + \Phi(z_2),$$

$\Phi(z_2)$ étant une fonction uniforme à l'intérieur de la couronne (Y_1, Y_2) du plan z_2 précédemment défini.

$\Phi(z_2)$ a une partie réelle nulle sur le cercle (Y_1) de rayon 1. Par conséquent la valeur moyenne de $\Re[\Phi(z_2)]$ sur le cercle (Y_2) est nulle. On en déduit donc, comme au numéro précédent que :

$$(III.42) \quad A + B \log q = \frac{1}{2K(k)} \int_0^\pi \frac{w(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \varphi}};$$

w étant connu, il est donc facile de calculer $A + B \log q$. Tout revient donc au calcul de B.

Or, si l'on décrit dans le plan z , le lacet $\mathcal{L}$, entourant la coupure $(-\mu, \mu)$ dans le sens direct, la valeur imaginaire de $F(z)$ doit augmenter de $-2\pi B$, par définition. Or :

$$-\beta \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial f'}{\partial x}.$$

Mais $\frac{\partial g}{\partial x}$ est connu [formule (III.41)], et par suite ⁽¹⁾ :

$$(III.43) \quad B = \frac{-\beta}{\pi} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \frac{\partial g}{\partial x} dx.$$

En résumé, les opérations à faire sont les suivantes :

- 1) Calcul de $g'(\varphi)$.
- 2) Calcul de $dg/d\varphi$, par une intégrale de Poisson.
- 3) Calcul de $g(\varphi)$, par une intégration de $dg/d\varphi$.
- 4) Calcul de B [formule (III.43)].
- 5) Calcul de A [formule (III.42)].

Le résultat s'écrit :

$$u = A u_0(\varphi) + g(\varphi),$$

$u_0(\varphi)$ représentant la valeur de u , pour le problème élémentaire portant quand $w_0 = 1$.

Application : Cône parabolique portant :

$$w = \varepsilon_0 (b^2 + x^2).$$

$$C_p = \varepsilon_0 p_3(\varphi)$$

(1) On se rendra compte facilement que $\partial g / \partial x$ s'annule pour $x = 0$. L'intégrale par suite ne présente aucune difficulté.

φ	α	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$p_3(\varphi)$	∞	5,844	2,472	1,472	1,144	1,070	1,062

On trouvera figure 53 la répartition des pressions comparée avec celle trouvée par l'analogie électrique.

3.2.- Cas où le cône n'est pas intérieur au cône de Mach (Γ).-

3.2.1.- GENERALITES.-

Du point de vue mathématique, il y a une différence essentielle entre le cas où le cône obstacle est entièrement intérieur à (Γ), et celui où, au contraire, il n'est pas entièrement intérieur. Si on se place dans le plan Z , la différence apparaît clairement. Alors que les mouvements étudiés au numéro 3.1. conduisaient à des problèmes de variable complexe, relatifs à une aire annulaire, les problèmes qui vont être étudiés maintenant seront relatifs à des aires simplement connexes. Ceci simplifie considérablement l'étude. Il y a lieu de prévoir que nous n'aurons plus à utiliser la théorie des fonctions elliptiques, et dans l'étude numérique ou analogique des problèmes, nous éviterons les difficultés posées par la détermination de la "constante d'intégration", pour la pression (voir N° 3.1. 3.2. et 3.1.3.3.).

Si on se place dans le plan Z , les fonctions $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$, ne seront plus identiquement nulles sur (C_0). Nous allons montrer que les relations de compatibilité prennent alors une forme particulièrement simple.

Celles-ci peuvent s'écrire :

$$(III.44) \quad -\beta Z \frac{dU}{dZ} = \frac{2Z}{Z^2+1} Z \frac{dV}{dZ} = \frac{2iZ}{Z^2-1} Z \frac{dW}{dZ},$$

et si l'on remarque que sur (C_0) :

$$Z \frac{dU}{dZ} = -i \frac{dU}{d\theta},$$

on déduit des formules (III.44) les relations suivantes entre les parties réelles u , v , w , de U , V , W , sur C_0 :

$$(III.45) \quad -\beta \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{dw}{d\theta}.$$

La connaissance d'une fonction u , v ou w sur un arc de cercle de (C_0) entraîne (à une constante additive près) la connaissance des deux autres.

Il est facile d'étendre ce résultat au cas où U , V , W présentent certaines

discontinuités. Soit A_1 un point de (C_0) d'argument θ_1 et supposons que la partie réelle de $W(Z)$ augmente de Δw quand θ passe de $\theta_1 - \varepsilon$ à $\theta_1 + \varepsilon$, ε étant positif et arbitrairement petit. Soit (γ) (voir *figure 45*) un petit arc de cercle centré en A_1 et intérieur à (C_0) . On a :

$$\Delta w = \mathcal{R} \left[\int_{\gamma} \frac{dW}{dZ} dZ \right].$$

Mais :

$$\Delta v = \mathcal{R} \left[\int_{\gamma} \frac{dV}{dZ} dZ \right],$$

et :

$$\Delta u = \mathcal{R} \left[\int_{\gamma} \frac{dU}{dZ} dZ \right].$$

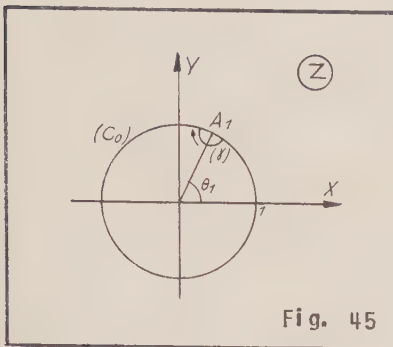


Fig. 45

Par conséquent, dans le cas où dU/dZ , dV/dZ , dW/dZ ont en A_1 un pôle simple, il suffit d'utiliser les relations de compatibilité, pour établir les formules :

mules :

(III.46)

$$-\beta \Delta u = \frac{1}{\cos \theta} \Delta v = \frac{1}{\sinh \theta} \Delta w.$$

REMARQUE. — Les formules que nous allons établir par la suite, seront démontrées dans le cas de figure où le cône obstacle se trouve en entier dans la région $x_1 > 0$. Mais il suffit de revenir aux généralités du numéro 1.2.2., pour reconnaître que les résultats obtenus seront valables dans des cas plus généraux. Dans ces conditions, on peut avoir, dans la région (A') (voir *figure 2*), des domaines empiétant l'un sur l'autre. Mais il n'y a aucune difficulté car les relations de compatibilité dans le plan (η, θ) formule (I.22) montrent que l'on connaît parfaitement les fonctions u, v, w , dans le plan (A') grâce aux conditions aux limites. On remarquera l'identité des formules (III.46) et (I.22).

3.2.2. — CÔNE DEBORDANT TOTALEMENT LE CÔNE DE MACH (*figure 28*). —

Si on utilise le plan Z , le problème revient à déterminer les trois fonctions $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$, de manière à ce que u, v, w , soient nuls sur les arcs de cercles $A_1 A_2$, $A'_1 A'_2$ (voir *fig. 46*) et que w prenne des valeurs données, d'une part sur la ligne $A_1 A A'_1 A_2$, d'autre part sur la ligne $A'_1 A A'_1 A'_2$. Contrairement à ce qui se passait dans le problème précédent, les deux demi-espaces, séparés

par le plan $x_3 = 0$, sont indépendants l'un de l'autre. Du point de vue mathématique, il s'agit par exemple de déterminer la solution dans un des demi-cercles déterminés dans (C_0) par la coupure AA' . Il s'en suit qu'il n'y a aucune distinction théorique entre le problème symétrique et le problème portant. On pourra naturellement opérer également dans le plan z . Il y aura lieu alors de déterminer la solution dans un demi-plan, le demi-plan supérieur, par exemple, la fonction $w = f(x)$ est supposée connue, le long d'un segment $\lambda \mu$, comprenant à son intérieur le segment $-1, +1$ de l'axe réel. Elle est nulle sur le reste de l'axe réel.⁽¹⁾

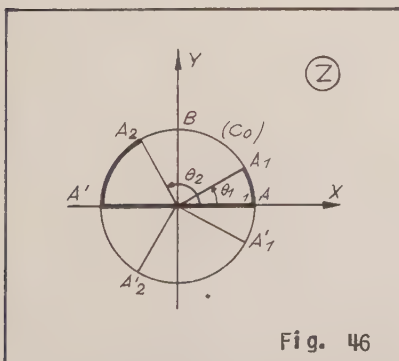


Fig. 46

(1) Voir Annexe n° 3

3.2.2.i. - Problème élémentaire.

Comme précédemment, nous allons commencer par l'étude du problème élémentaire, c'est-à-dire celui où $w = w_0$, sur la partie d'un cône située dans la région $x_3 > 0$.

Opérons, par exemple, dans le plan Z ; la fonction $W(Z) = w_0$ à une partie réelle nulle sur le segment AA' et les arcs AA_1 et $A'A_1$, et égale à $-w_0$ sur l'arc A_1A_2 . On peut, par application du principe de Schwartz, étendre sa définition à un cercle complet, la détermination de cette fonction est alors classique (voir par exemple, ref. 13 p. 162).

Ceci permet d'écrire immédiatement :

$$(III.47) \quad W(Z) = w_0 - \frac{i w_0}{\pi} \log \frac{1+Z^2 - 2Z \cos \theta_1}{1+Z^2 - 2Z \cos \theta_2},$$

le logarithme étant réel pour Z réel, θ_1 et θ_2 étant les abscisses angulaires respectives des points A_1 et A_2 . La fonction $V(Z)$ peut se déterminer par exemple, à l'aide des relations de compatibilité :

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{w_0}{\pi} \frac{Z^2+1}{Z^2-1} \left[\frac{1}{Z-e^{i\theta_1}} + \frac{1}{Z-e^{-i\theta_1}} - \frac{1}{Z-e^{i\theta_2}} - \frac{1}{Z-e^{-i\theta_2}} \right].$$

Dans l'intégration, il suffit de choisir la constante d'intégration de manière à annuler la partie réelle de $V(Z)$, sur l'arc A_1A_2 . On obtient alors :

$$(III.48) \quad V(Z) = \frac{i w_0}{\pi} \left[\cotg \theta_1 \log \frac{e^{i\theta_1} - Z}{1 - Ze^{i\theta_1}} - \cotg \theta_2 \log \frac{Z - e^{i\theta_2}}{1 - Ze^{i\theta_2}} \right],$$

les logarithmes ayant un argument nul sur l'arc A_1A_2 . On trouve pour v les valeurs suivantes :

$$v = w_0 \cotg \theta_1, \quad \text{sur l'arc } A_1A_2,$$

$$v = w_0 \cotg \theta_2, \quad \text{sur l'arc } A'A_2,$$

valeurs que l'on pouvait d'ailleurs écrire directement en vertu des relations (1) (III.45) et (III.43).

Pour écrire la valeur de v sur l'axe AA' , il faut calculer l'argument de :

$$\frac{e^{i\theta_1} - Z}{1 - Ze^{i\theta_1}}.$$

Or :

$$\text{Arg} \left[\frac{e^{i\theta_1} - Z}{1 - Ze^{i\theta_1}} \right] = \text{Arg} \left[(e^{i\theta_1} - Z) (1 - Ze^{-i\theta_1}) \right].$$

Pour calculer cet argument, pour $Z = X$, on remarque que le module de $(e^{i\theta_1} - Z) (1 - Ze^{-i\theta_1})$ est celui de $(e^{i\theta_1} - X)^2$, soit $1+X^2 - 2X \cos \theta_1$; d'autre part sa partie réelle s'écrit $\cos \theta_1 (1+X^2) - 2X$. Si donc on pose :

(1) Ceci montre que l'on pouvait écrire directement la formule (III.48), sans écrire les relations de compatibilité.

$$\kappa = \frac{2\pi}{1+\kappa^2},$$

$$(III.49) \quad \text{Arg} \left[\frac{e^{i\theta_1} - Z}{1 - Ze^{i\theta_1}} \right] = \text{Arc cos} \frac{\cos \theta_1 - \kappa}{1 - \kappa \cos \theta_1},$$

l'arc cosinus ayant d'ailleurs sa détermination principale. On trouve de même :

$$(III.50) \quad \text{Arg} \left[\frac{Z - e^{i\theta_2}}{1 - Ze^{i\theta_2}} \right] = - \text{Arc cos} \frac{\kappa - \cos \theta_2}{1 - \kappa \cos \theta_2};$$

d'où sur l'axe AA' :

$$v = -\frac{\omega_0}{\pi} \left[\cotg \theta_1 \text{Arc cos} \frac{\cos \theta_1 - \kappa}{1 - \kappa \cos \theta_1} + \cotg \theta_2 \text{Arc cos} \frac{\kappa - \cos \theta_2}{1 - \kappa \cos \theta_2} \right].$$

Le calcul de U (Z) est tout à fait analogue. On trouve :

$$(III.51) \quad U(Z) = -\frac{i \omega_0}{\beta \pi} \left[\frac{1}{\sin \theta_2} \log \frac{Z - e^{i\theta_2}}{1 - Ze^{i\theta_2}} - \frac{1}{\sin \theta_1} \log \frac{e^{i\theta_1} - Z}{1 - Ze^{i\theta_1}} \right],$$

les logarithmes ayant la même détermination que dans la formule (III.48). On trouve, comme valeur du coefficient de pression ($\omega_0 = \alpha$) :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\sin \theta_2}, \quad \text{sur l'arc } A'A_2,$$

$$(III.52) \quad C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\sin \theta_1}, \quad \text{sur l'arc } A'A_1,$$

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta \pi} \left[\frac{1}{\sin \theta_1} \text{Arc cos} \frac{\cos \theta_1 - \kappa}{1 - \kappa \cos \theta_1} + \frac{1}{\sin \theta_2} \text{Arc cos} \frac{\kappa - \cos \theta_2}{1 - \kappa \cos \theta_2} \right],$$

sur l'axe AA'.

Dans le cas où Ox_1x_3 est un plan de symétrie :

$$\theta_2 = \pi - \theta_1,$$

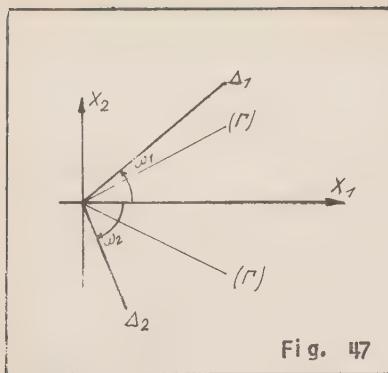
et la dernière formule (III.52) s'écrit encore :

$$(III.53) \quad C_p = \frac{2\alpha}{\beta \pi \sin \theta_1} \left[\text{Arc cos} \frac{\cos \theta_1 - \kappa}{1 - \kappa \cos \theta_1} + \text{Arc cos} \frac{\kappa + \cos \theta_1}{1 + \kappa \cos \theta_1} \right] =$$

$$= \frac{4\alpha}{\beta \pi \sin \theta_1} \text{Arc sin} \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \theta_1}}.$$

Pour utiliser ces formules, il suffit de relier les angles θ_1 et θ_2 à la forme géométrique de l'aile Δ donnée (fig. 47). On a, par définition :

$$\cos \theta_1 = 1/\beta \tan \omega_1, \quad \cos \theta_2 = 1/\beta \tan \omega_2.$$



Rappelons également que :

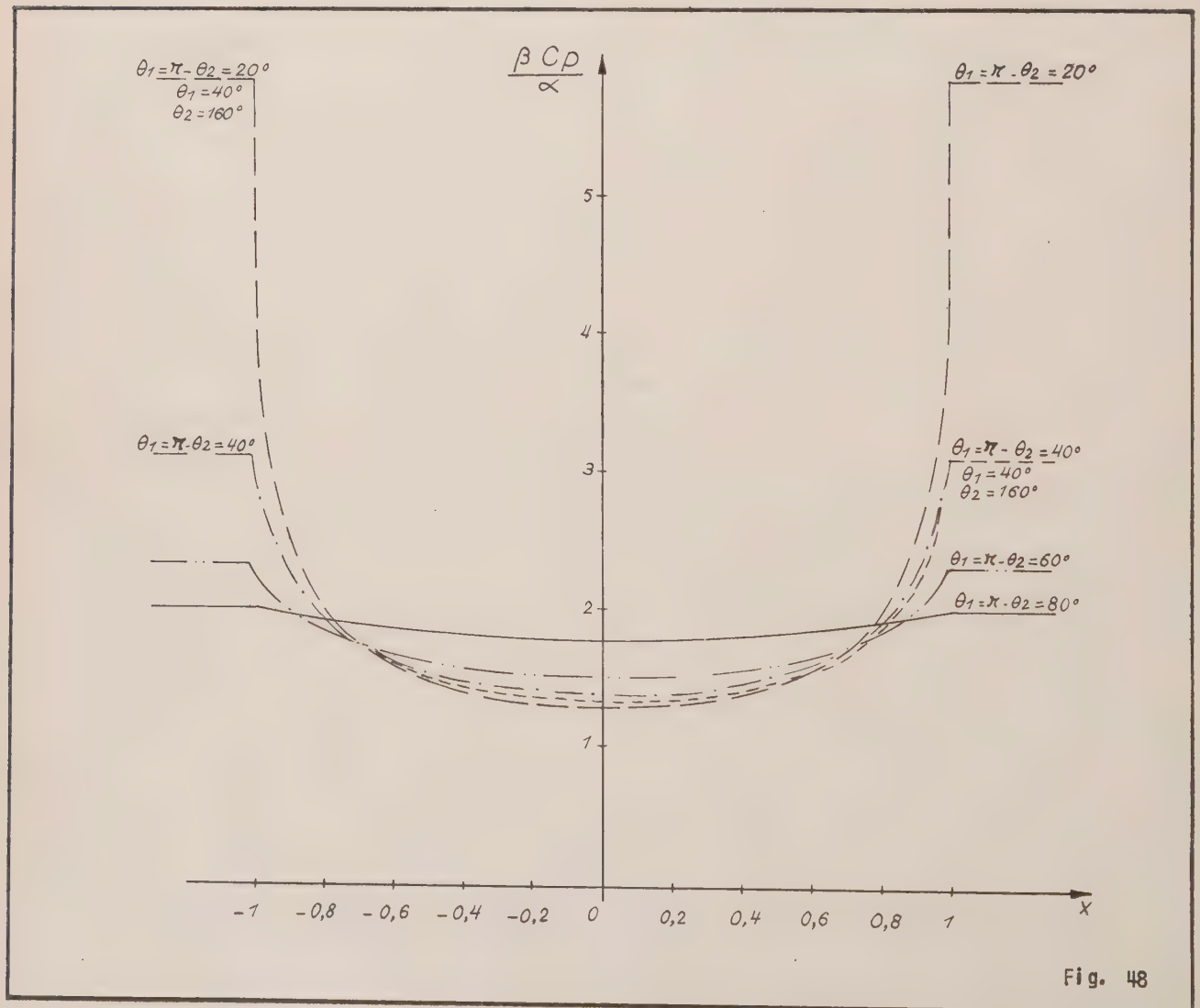
$$x = \frac{\beta x_2}{x_1}.$$

On trouvera, figure 48, quelques applications de la formule (III.53).

3.2.2.2.- Résultante des efforts normaux sur la région supérieure ($x_3 > 0$).

On peut, comme au numéro 3.1.9, donner une formule simple permettant le calcul de la résultante des efforts normaux. Désignons par C_z^+ le coefficient sans dimension caractérisant cette résultante, C_z^+ est défini par l'égalité :

$$C_z^+ = - \frac{\int_{\lambda}^{\mu} C_p dx}{\int_{\lambda}^{\mu} dx};$$



de même, nous définissons le nombre sans dimension, C_z^- , caractérisant les efforts normaux sur la région inférieure ($x_3 < 0$), par l'égalité :

$$C_z^- = \frac{\int_{\lambda}^{\mu} C_p dx}{\int_{\lambda}^{\mu} dx},$$

les intégrales étant prises dans le plan z , la première sur le bord supérieur de la coupure (λ, μ), la seconde sur le bord inférieur. Cette définition entraîne que le C_z global d'un cône s'écrit :

$$C_z = C_z^+ + C_z^-.$$

Or :

$$\int_{\lambda}^{\mu} dx = \frac{1}{\cos \theta_1} - \frac{1}{\cos \theta_2}.$$

D'autre part :

$$\int_{\lambda}^{\mu} C_p dx = 2 \mathcal{R} \left[\int_{\lambda}^{\mu} U(z) dz \right] = -4 \mathcal{R} \left[\int_{A_2 A' A A_1} U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \right].$$

Mais l'intégrale de $U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2}$, le long du contour fermé $B A_2 A' A_1 B$ (fig. 46) est nulle. D'autre part $U(Z)$ ayant une partie réelle nulle sur l'arc $A_2 A_1$, on a :

$$\mathcal{R} \left[\int_{A_2 A' A A_1} U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \right] = -\mathcal{R} \left[\int_{A_1 A_2} U(Z) \frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2} dZ \right] = \mathcal{R} [i \pi R_1],$$

R_1 désignant le résidu de la fonction à intégrer, au point $Z = i$:

$$R_1 = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dZ(z=i)} = \frac{1}{2\beta} \frac{dW}{dZ(z=i)}.$$

On obtient donc la formule générale :

$$(III.54) \quad C_z^+ = -\frac{2 \cdot i \cdot \pi}{\beta} \frac{\cos \theta'_1 \cos \theta_2}{\cos \theta'_1 - \cos \theta_2} \frac{dW}{dZ(z=i)}.$$

Dans le cas du problème élémentaire étudié au numéro 3.2.2.1., on a :

$$\frac{dW}{dZ(z=i)} = \frac{i\alpha}{\pi} \frac{\cos \theta'_2 - \cos \theta'_1}{\cos \theta'_1 \cos \theta'_2},$$

d'où :

$$(III.55) \quad C_z^+ = -\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{2i}{\beta},$$

si on pose $\alpha = -i$, suivant la notation habituelle dans la théorie des ailes.

Nous retrouverons ainsi un résultat remarquable : la valeur du coefficient C_2^+ est indépendante des angles θ_1 et θ_2 .

3.2.2.3. - Etude du cas général par la méthode des analogies électriques.

La méthode exposée précédemment (numéro 3.1.3.3.) peut s'appliquer intégralement. Il faut disposer les électrodes sur les arcs AA_1 , $A'A_2$ et sur le segment $A A'$. Ces électrodes doivent être portées à des potentiels donnés, l'arc $A_1 A_2$ conducteur est porté au potentiel 0. Enfin, au point B, on détachera une petite électrode dans le but de mesurer la résultante des efforts normaux; cette résultante, donnée par la formule (III.54), est en effet proportionnelle à l'intensité rentrant en B.

La valeur de u , sur les arcs AA_1 et $A'A_2$ est immédiatement connue par simple intégration:

En effet si, par exemple, w_1 désigne la valeur de w donnée pour

$$\theta = \theta_1 - \varepsilon,$$

(ε arbitrairement petit positif), on a ⁽¹⁾, d'après (III.46) :

$$u_1 = -\frac{1}{\beta \sin \theta_1},$$

et les formules (III.45) permettent le calcul de u sur tout l'arc AA_1 . Il n'y a donc lieu de mesurer les intensités, sortant par chacune des électrodes, que le long du segment AA' . Comme précédemment, cette intensité, proportionnelle à $\partial w / \partial Y$, fournit immédiatement la valeur de $\partial u / \partial X$ le long de l'axe OX , grâce à la formule :

$$\beta \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{2X}{1-X^2} \frac{\partial w}{\partial Y}.$$

Comme l'on connaît la valeur de u aux points A et A', on dispose de données surabondantes pour calculer la valeur de u sur l'axe AA' . Il n'y a donc pas besoin de relever une distribution du potentiel, à l'intérieur de la cuve, comme dans le cas exposé au N° 3.1.3.2.

3.2.2.4. - Etude du problème général par des procédés purement numériques.

Pour simplifier l'exposé, nous nous contenterons d'examiner le cas où le cône donné admet le plan Ox_1x_3 , comme plan de symétrie. Cela revient à dire que dans le plan z , la fonction $w(x)$ est paire en x , sur la coupure $(-\mu, \mu)$ représentant le cône donné.

Soit w_1 la valeur de w aux points $x = 1$ et $x = -1$, nous poserons :

$$f(x) = w(x) - w_1.$$

(1) Physiquement, le fait que la pression sur les génératrices limites du cône obstacle, ne dépendent que de l'inclinaison du plan tangent, le long de ces génératrices, est évident. Il traduit "l'indépendance" (voir N° 1.2.4) de ces génératrices limites, par rapport aux autres génératrices du cône obstacle.

Si $1 < x < \mu$, on posera $x = \frac{1}{\cos \theta}$, $\mu = \frac{1}{\cos \theta_1}$ et $F(\theta) = f(x)$. On remarque que $F(0) = 0$. Ceci dit, il est d'abord évident d'après ce qui précède, que l'on peut calculer immédiatement la pression, à l'extérieur du cône (Γ).

Pour calculer la pression à l'intérieur de (Γ), on considérera l'écoulement comme la superposition.

- 1 - d'un écoulement élémentaire ($w = -w_1$, sur toute la coupure),
- 2 - d'une infinité d'écoulements élémentaires débordant le cône (Γ) et symétriques par rapport à Ox . Ces écoulements donnent, au point x ($x < 1$), un coefficient de pression égal à :

$$C_p = \frac{4}{\beta \pi} \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{dF}{d\theta} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-x^2 \cos^2 \theta}} d\theta,$$

- 3 - d'un écoulement symétrique intérieur au cône de Mach, défini par $w = f(x)$, sur la coupure $(-1, +1)$. On peut, pour le calcul de cet écoulement, appliquer la méthode du n° 3.1.3.3. Remarquons simplement qu'il n'y a pas besoin de déterminer la constante d'intégration, puisque l'on sait que $u = 0$, pour $x = \pm 1$.

3.2.3. - CONE PARTIELLEMENT INTERIEUR ET PARTIELLEMENT EXTERIEUR AU CONE DE MACH (Γ) [figure 30].

3.2.3.1. - Problème élémentaire symétrique.

Le cercle limité par (C_0) doit être entaillé par une coupure CA (voir figure 49), la partie réelle de $W(Z)$ prenant la valeur constante $w_0 = \alpha$, sur le bord supérieur de la coupure, et la valeur $-w_0$ sur le bord inférieur. Sur le cercle (C_0), w est nul excepté sur l'arc AA_1 où $w = w_0$, et sur l'arc AA'_1 où $w = -w_0$. On désignera par $Z = a$, l'affixe du point C et par θ_1 l'argument de A_1 sur le cercle (C_0).

La fonction $W(Z)$ s'écrit sans difficulté :

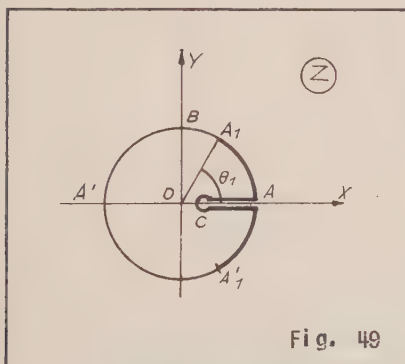
$$W(Z) = w_0 + i \frac{w_0}{\pi} \log \frac{(Z-a)(1-aZ)}{(Z-e^{i\theta_1})(Z-e^{-i\theta_1})},$$

l'argument de $\frac{(Z-a)(1-aZ)}{(Z-e^{i\theta_1})(Z-e^{-i\theta_1})}$ étant choisi égal à

zéro, au point A , sur le bord supérieur de la coupure. $W(Z)$ n'étant défini qu'à une constante imaginaire près, on peut aussi écrire :

$$(III.56) \quad W(Z) = w_0 + i \frac{w_0}{\pi} \log \frac{2Zt_0 - (1+Z^2)}{1+Z^2 - 2Z \cos \theta_1},$$

en posant $t_0 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$.



Cherchons $U(Z)$:

$$-\beta \frac{dU}{dZ} = \frac{2iZ}{Z^2-1} \frac{dW}{dZ} = -\frac{2w_0}{\pi} \frac{Z}{Z^2-1} \left[\frac{1}{Z-a} - \frac{a}{1-aZ} - \frac{1}{Ze^{i\theta_1}} - \frac{1}{Z-e^{-i\theta_1}} \right],$$

d'où :

$$(III.57) \quad U(Z) = \frac{2w_0}{\beta\pi} \left[\frac{i}{2\sinh\theta_1} \log \frac{e^{i\theta_1}-Z}{1-Ze^{i\theta_1}} - \frac{a}{1-a^2} \log \frac{a-Z}{1-aZ} \right].$$

Par suite, sur l'arc AA_1 :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\sinh\theta_1},$$

résultat que l'on pouvait prévoir immédiatement.

On obtient facilement la valeur de C_p , le long de l'axe OX , il suffit d'écrire la formule (III.49) :

$$(III.58) \quad C_p = \frac{2\alpha}{\pi\beta} \left[\frac{1}{\sinh\theta_1} \text{Arc cos} \frac{\cos\theta_1-x}{1-x\cos\theta_1} + \frac{2a}{1-a^2} \log \left| \frac{a-X}{1-aX} \right| \right].$$

$$\text{Rappelons que } x = \frac{2X}{1+X^2}.$$

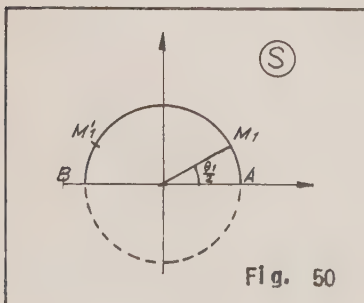
Cas particulier : Supposons que $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$, dans ces conditions :

$$(III.59) \quad \begin{cases} \text{sur l'arc } AA_1, & C_p = \frac{2\alpha}{\beta}, \\ \text{sur le segment } AA', & C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\text{Arc cos}(-x) \right] = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \text{Arc sinh}(x) \right). \end{cases}$$

Rappelons que, dans toutes ces formules $x = \beta \frac{r}{x_1}$, $(x_1, r, 0)$ étant les coordonnées semipolaires d'un point de l'aile Δ , dans le système d'axes $(Ox_1x_2x_3)$, et que $\cos\theta_1 = 1/\beta \operatorname{tg} \omega_1$.

3.2.3.2. — Problème portant élémentaire, dans le cas où $a = 0$.

La transformation $s = \sqrt{Z}$ transforme le cercle (C_0) en un demi-cercle dans le plan de la variable complexe s . Dans ce plan, A_1 et A'_1 ont pour homologues M_1 et M'_1 (voir figure 50). La fonction $W(s)$ a une partie réelle nulle sur l'arc $M_1M'_1$ et égale à w_0 sur les arcs AM_1 , BM'_1 et sur le segment $A'B$.



Nous allons chercher directement la fonction $U(Z)$ ou plutôt la fonction $U(s)$. En effet, $U(s)$ a sa partie réelle nulle sur $M_1M'_1$ et, d'après les relations de compatibilité, l'on sait que, comme dans les numéros précédents :

$$u = \frac{w_0}{\beta} \frac{1}{\sinh\theta_1}, \quad \text{sur } \widehat{AM_1},$$

$$u = \frac{w_0}{\beta} \frac{1}{\sinh\theta_1}, \quad \text{sur } \widehat{BM'_1}.$$

De plus, la partie imaginaire de $U(s)$ est constante sur l'axe réel et, par suite, peut être posée égale à 0. On peut donc prolonger analytiquement la fonction $U(s)$ à travers l'axe réel. $U(s)$ se détermine alors comme solution d'un problème de Dirichlet, à l'intérieur du cercle de rayon unité.

On a :

$$U(s) = \frac{i w_0}{\beta \pi \sinh \theta_1} \log \frac{(s - e^{i\theta_1/2})(s + e^{-i\theta_1/2})}{(s + e^{i\theta_1/2})(s - e^{-i\theta_1/2})},$$

le logarithme valant $i\pi$ pour $s = 1$.

Il est alors facile de calculer u sur l'axe réel, c'est-à-dire sur le segment OA du plan original Z . Posons :

$$x = \frac{2Z}{1+Z^2} = \frac{2s^2}{1+s^4}.$$

La quantité sous le signe logarithmique s'écrit :

$$\frac{s^2 - 1 - 2is \sinh \frac{\theta_1}{2}}{s^2 - 1 + 2is \sinh \frac{\theta_1}{2}},$$

son argument est égal à celui de :

$$(s^2 - 1 - 2is \sinh \frac{\theta_1}{2})^2.$$

Or la partie réelle et le module de cette expression sont égaux respectivement à :

$$(s^2 - 1)^2 - 4s^2 \sinh^2 \frac{\theta_1}{2} = s^4 + 1 - 2s^2 (2 - \cos \theta_1),$$

et :

$$(s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sinh^2 \frac{\theta_1}{2} = s^4 + 1 - 2s^2 \cos \theta_1.$$

D'où :

$$u = -\frac{w_0}{\beta \pi \sinh \theta_1} \text{Arc cos} \left[1 - \frac{2x(1 - \cos \theta_1)}{1 - x \cos \theta_1} \right],$$

$$(III.60) \quad C_p = \frac{2\alpha}{\beta \pi \sinh \theta_1} \text{Arc cos} \left[1 - \frac{2x(1 - \cos \theta_1)}{1 - x \cos \theta_1} \right].$$

Cas particulier : Supposons que $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$C_p = \frac{2\alpha}{\pi \beta} \text{Arc cos} (1 - 2x).$$

3.2.3.3.- Problème élémentaire portant dans le cas où $a \neq 0$.

L'élégante démonstration qui vient d'être faite pour $a = 0$ et dont le principe se trouve dans le mémoire original de Busemann, cache une difficulté et a conduit M. BESCHKINE (ref. II) à donner une formule dans le cas où $a \neq 0$ qui, au

moins dans certains cas, conduit à des difficultés. En opérant directement sur la fonction U , on risque d'oublier les conditions supplémentaires que, du fait des relations de compatibilité, il faut faire intervenir si on ne veut pas avoir des singularités pour les fonctions U, V, W , en d'autres points que les extrémités de la coupure.

En effet, si $U(Z)$ est régulière à l'intérieur du cercle (C_0) ; $V(Z)$ et $W(Z)$ auront une singularité logarithmique au point $Z = 0$. Nous allons étudier le cas où $a \neq 0$, en étudiant directement la fonction W , et en nous astreignant à ne pas avoir de singularités, en dehors des génératrices limites du cône. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette question importante au N° 3.3.

Il s'agit donc d'étudier le cas où $w = w_0$, sur l'arc AA_1 et sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure CA (voir fig. 49) et sur l'arc AA'_1 ; la transformation :

$$\sigma = \frac{Z - a}{1 - aZ},$$

qui conserve le cercle de rayon unité, nous ramène au cas où la coupure est disposée suivant un rayon. Enfin la transformation :

$$\sigma = s^2,$$

conduit dans le plan s à rechercher une fonction $W(s)$ dont la partie réelle prend la valeur w_0 sur les arcs $BM_1, B'M'_1$ du demi cercle de rayon unité du plan positif et sur le segment BB' , et s'annule sur l'arc $M_1M'_1$ par application du principe de Schwartz, on peut prolonger la fonction $W(s) = w_0$ au demi-cercle inférieur du plan s . Cette fonction est définie par les valeurs de sa partie réelle sur la circonférence de rayon 1 du plan s . Mais dW/dZ devant s'annuler au point $Z = -1$, dW/ds doit s'annuler pour $s = \pm i$.

Pour satisfaire à cette condition, on s'autorise à admettre, pour $W(s)$, des points singuliers aux points M_1, M'_1, M_2, M'_2 , et au point $s = 0$. Or d'après l'étude du numéro 3.1.1.2. ce point peut être un pôle d'ordre un, le résidu étant nécessairement imaginaire pur.

Soit ik le résidu de ce pôle, on peut donc écrire :

$$W(s) = w_0 + G(s) + ik \frac{1+s^2}{s},$$

$G(s)$ étant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1.

Mais sur le cercle $|s| = 1$, $ik \frac{1+s^2}{s}$ est imaginaire pur. On en déduit immédiatement la fonction $G(s)$, et par suite, $W(s)$ est de la forme :

$$W(s) = w_0 - \frac{i w_0}{\pi} \log \frac{1 + s^2 - 2s \cos \frac{\varphi_1}{2}}{1 + s^2 + 2s \cos \frac{\varphi_1}{2}} + ik \frac{1 + s^2}{s},$$

$\frac{\varphi_1}{2}$ étant l'argument de l'affixe du point M_1 .

On calcule $U(s)$ grâce aux relations de compatibilité :

$$\frac{dU}{ds} = - \frac{2 w_0}{\beta \pi (1-a^2)} \frac{(s^2+a)(1+s^2a)}{s^4 - 1} \left(\frac{2 e^{i \frac{\varphi_1}{2}}}{s^2 - e^{i \varphi_1}} + \frac{2 e^{-i \frac{\varphi_1}{2}}}{s^2 - e^{-i \varphi_1}} \right) + \frac{2k}{\beta} \frac{(s^2+a)(1+s^2a)}{(1+a^2)s^2(s^2+1)},$$

car :

$$\frac{2Z}{Z^2-1} = 2 \frac{(\sigma+a)(1+\sigma a)}{(\sigma^2-1)(1-a^2)}.$$

On vérifie immédiatement que les points $s = \pm i$ ne sont pas des pôles (et que, par suite les points $Z = \pm 1$ ne sont pas des points singuliers) si :

$$k = - \frac{w_0}{\pi \cos \frac{\varphi_1}{2}}.$$

D'où, pour $U(s)$:

$$(III.61) \quad U(s) = \frac{2w_0}{\beta \pi \cos \frac{\varphi_1}{2}} \frac{a(1-s^2)}{(1-a^2)s} + \frac{i w_0}{\beta \pi} \frac{(1+2a \cos \varphi_1 + a^2)}{(1-a^2) \sin \varphi_1} \log \frac{(s-e^{\frac{i\varphi_1}{2}})(s+e^{-\frac{i\varphi_1}{2}})}{(s-e^{-\frac{i\varphi_1}{2}})(s+e^{\frac{i\varphi_1}{2}})}.$$

Il est facile de relier l'angle φ_1 à l'angle θ'_1 donné, repérant le point A_1 sur (C_0) dans le plan Z :

$$e^{i\theta'_1} = \frac{\cos \varphi_1 (1+a^2) + 2a + i(1-a^2) \sin \varphi_1}{1 + 2a \cos \varphi_1 + a^2}.$$

Le calcul de C_p est alors simple, il suffit de reprendre les calculs de la fin du numéro précédent :

$$\frac{2s^2}{s^4+1} = \frac{2(1+a^2) - 2a(1+Z^2)}{(1+a^2)(1+Z^2)4aZ} = \frac{x-x_0}{1-xx_0},$$

si, sur l'axe réel, on pose :

$$x = \frac{2Z}{1+Z^2}, \quad x_0 = \frac{2a}{1+a^2}.$$

Dans ces conditions :

$$(III.62) \quad \cos \varphi_1 = \frac{\cos \theta'_1 - x_0}{1-x_0 \cos \theta'_1},$$

et par suite :

$$C_p = \frac{2a}{\pi \beta \sin \theta'_1}, \quad \text{sur l'arc } A A_1,$$

$$(III.63) \quad C_p = - \frac{4a\alpha}{\pi \beta (1-a) \cos \frac{\varphi_1}{2}} \frac{1-X}{\sqrt{(X-a)(1-aX)}} + \frac{2\alpha}{\pi \beta \sin \theta'_1} \text{Arc cos} \left[1 - \frac{2(x-x_0)(1-\cos \varphi_1)}{1-xx_0-(x-x_0)\cos \varphi_1} \right],$$

sur le bord supérieur de la coupure AC .

Si $a = x_0 = 0$, on retrouve bien la formule (III.60); la formule donnée par L. BESCHKINE (ref. II) ne contient pas le premier terme.

3.2.3.4. Calcul du C_z dans le cas portant.

Le C_z se définit toujours, dans le plan z , par l'égalité :

$$C_z = \frac{\int_{\mathcal{L}} C_p dx}{\int_{\lambda} \mu dx},$$

la première intégrale étant prise dans le sens direct, sur le lacet entourant la coupure.

Mais, avec les notations adoptées :

$$\lambda = x_0, \quad \mu = \frac{1}{\cos \theta_1},$$

et :

$$\int_{\lambda}^{\mu} dx = \frac{1}{\cos \theta_1} - x_0 = \frac{1 - x_0 \cos \theta_1}{\cos \theta_1}.$$

D'autre part :

$$\int_{\mathcal{L}} C_P dz = 2 \int_{A_1 A C A A_1} C_P \frac{1 - Z^2}{(1 + Z^2)^2} dz.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int_{A_1 A C A A_1} \mathcal{R} \left[U(Z) \right] \frac{1 - Z^2}{(1 + Z^2)^2} dz &= \mathcal{R} \left[\int_{A_1 A C A A_1} U(Z) \frac{1 - Z^2}{(1 + Z^2)^2} dz \right] = \mathcal{R} \left[\int_{A_1 A' A_1} U(Z) \frac{1 - Z^2}{(1 + Z^2)^2} dz \right] = \\ &= \mathcal{R} \left[i \pi (R_i + R_{-i}) \right] \end{aligned}$$

R_i et R_{-i} étant les résidus de la fonction à intégrer aux points $Z = i$ et $Z = -i$; finalement :

$$C_z = \frac{2 i \pi \cos \theta_1}{\beta (1 - x_0 \cos \theta_1)} \left[\left(\frac{dW}{dZ} \right)_{(z=i)} - \left(\frac{dW}{dZ} \right)_{(z=-i)} \right].$$

Dans le cas purement portant :

$$(III.64) \quad C_z = \frac{4 i \pi \cos \theta_1}{\beta (1 - x_0 \cos \theta_1)} \left(\frac{dW}{dZ} \right)_{(z=i)}.$$

Faisons l'application de cette formule au cas élémentaire :

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dZ} = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1 - a^2}{(1 - aZ)^2}.$$

On posera pour simplifier pour $Z = i$:

$$a = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad x_0 = -\cos \beta, \quad \sigma = e^{i\beta}.$$

On trouve alors que :

$$\left(\frac{dW}{dZ} \right)_{(z=i)} = \frac{i w_0}{\pi} \frac{\sin^2 \beta \cos \frac{\beta}{2}}{(\cos \varphi_1 - \cos \beta) \cos \frac{\varphi_1}{2}};$$

d'où ($w_0 = \alpha$) :

$$C_z = -\frac{4 \alpha}{\beta} \frac{\cos \theta_1 \sin \beta}{(1 + \cos \beta \cos \theta_1) (\cos \varphi_1 - \cos \beta) \cos \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Si on utilise l'égalité (III.62) définissant φ_1 et si on pose $\alpha = -i$, i désignant l'incidence, on trouve la formule très simple :

$$(III.65) \quad C_z = \frac{4 i}{\beta} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\varphi_1}{2}} .$$

3.2.3.5. - Cas général.

L'étude du cas général peut se faire, soit par analogie électrique, soit par le calcul. Les méthodes à employer résultent de ce qui a été déjà vu aux numéros 3.1.3.2., 3.1.3.3., 3.2.2.3. et 3.2.2.4.

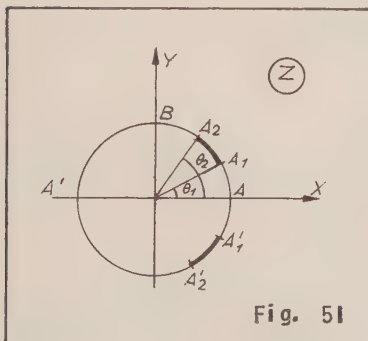
Indiquons seulement que, dans la résolution du problème portant, par analogie électrique, il faut disposer une singularité au point C, comme celle définie au numéro 3.1.3.2.3. Le réglage du potentiel, auquel il faut porter la partie conductrice de cette singularité, s'obtient par la condition qu'il ne rentre pas d'intensité au point A'. Pour vérifier cette condition, on utilisera le procédé déjà indiqué au numéro cité.

Naturellement, la détermination du C_z global se fera très facilement, en mesurant l'intensité rentrant au point B et en appliquant la formule (III.64).

3.2.4. - CONE ENTIEREMENT EXTERIEUR AU CONE (Γ) (fig. 29).

3.2.4.1. - Problème symétrique élémentaire.

Le problème consiste à déterminer $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$, par les conditions suivantes : la partie réelle de $W(Z)$ prend, sur l'arc $A_1 A_2$ (voir fig. 51) du cercle (C_0) , la valeur constante $w_0 = \alpha$ et la valeur $-w_0$ sur l'arc $A'_1 A'_2$. Sur les autres portions de (C_0) , cette partie réelle est nulle. On peut donc écrire immédiatement la valeur de la partie réelle de $U(Z)$ sur le cercle (C_0) [formules (III.45), (III.46)]. C'est une fonction paire de l'argument θ . On a :



$$u = 0 , \quad \text{sur l'arc } A'_1 A'_2 ,$$

$$u = -\frac{w_0}{\beta} \frac{1}{\sin \theta_2} , \quad \text{sur l'arc } A_2 A_1 ,$$

$$u = -\frac{w_0}{\beta} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) , \quad \text{sur l'arc } A_1 A'1 ;$$

d'où pour la fonction $U(Z)$, la formule :

$$(III.66) \quad U(Z) = \frac{i w_0}{\beta \pi} \left[\frac{1}{\sin \theta_2} \log \frac{e^{i\theta_2} Z}{1 - Z e^{i\theta_2}} - \frac{1}{\sin \theta_1} \log \frac{e^{i\theta_1} Z}{1 - Z e^{i\theta_1}} \right] ,$$

les logarithmes prenant la valeur $i\pi$, au point $Z = 1$.

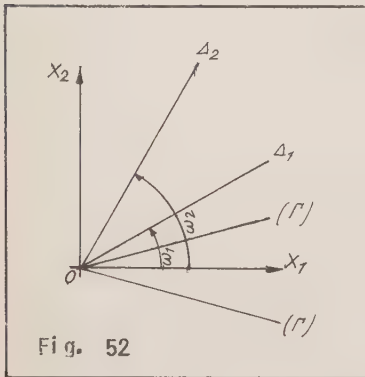
Le calcul complet de $V(Z)$ et $W(Z)$ n'offre également aucune difficulté.

On déduit de cette formule le calcul des pressions sur l'obstacle et en dehors de l'obstacle.

Dans le plan $x_1 O x_2$, le coefficient de pression vaut :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\sin \theta'_2}, \quad \text{sur l'obstacle,}$$

$C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \left(\frac{1}{\sin \theta'_2} - \frac{1}{\sin \theta'_1} \right)$, dans la région comprise entre l'obstacle et le cône de Mach du point O .



Rappelons que si ω_1 et ω_2 désignent les angles des génératrices limites de l'obstacle avec Ox_1 , on a par définition (voir figure 52) :

$$\cos \theta'_1 = 1/\beta \operatorname{tg} \omega_1, \quad \cos \theta'_2 = 1/\beta \operatorname{tg} \omega_2.$$

Enfin, à l'intérieur du cône de Mach, au point x_1, x_2 , on a :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\frac{1}{\sin \theta'_2} \operatorname{Arc} \cos \frac{\cos \theta'_2 - x}{1 - x \cos \theta'_2} - \frac{1}{\sin \theta'_1} \operatorname{Arc} \cos \frac{\cos \theta'_1 - x}{1 - x \cos \theta'_1} \right],$$

si $x = \beta \frac{x_2}{x_1}$, les arcs cosinus ayant leur détermination principale.

3.2.4.2. - Problème symétrique général.

Le problème symétrique général ne présente aucune difficulté, car on peut opérer par superposition, soit :

$$w = \alpha(\theta),$$

la valeur donnée de la composante de la vitesse suivant Ox_3 , le long de l'obstacle ($\theta'_1 < \theta < \theta'_2$). Les formules donnant le C_p s'écrivent immédiatement :

$$(III.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_p = -\frac{2}{\beta} \int_{\theta}^{\theta'_2+0} \frac{d\alpha}{\sin \theta}, \quad \text{au point de l'obstacle, de paramètre } \theta; \\ C_p = -\frac{2}{\beta} \int_{\theta'_1-0}^{\theta'_2+0} \frac{d\alpha}{\sin \theta}, \quad \text{derrière l'obstacle et en dehors du cône } (\Gamma), \\ C_p = -\frac{2}{\beta\pi} \int_{\theta'_1-0}^{\theta'_2+0} \operatorname{Arc} \cos \frac{\cos \theta - t}{1 - t \cos \theta} \frac{d\alpha}{\sin \theta} \quad \text{à l'intérieur du cône de Mach.} \end{array} \right.$$

Les intégrales des formules précédentes doivent être prises au sens de *Stieljes*, ceci étant fondamental pour le cas où $\alpha(\theta)$ présente des discontinuités. Il y aura, en particulier, à tenir compte des deux discontinuités, la discontinuité $+\alpha(\theta_1)$, pour $\theta = \theta_1$ et la discontinuité $-\alpha(\theta_2)$, pour $\theta = \theta_2$. C'est pour ne pas oublier ces discontinuités que nous avons écrit certaines limites des intégrales $\theta_1 - 0$, $\theta_2 + 0$.

3.2.4.3. - Problème élémentaire portant.

La solution obtenue [formule (III.66)], pour le problème symétrique est valable, car dW/dZ s'annule nécessairement aux points $Z = \pm 1$, ou encore dU/dZ s'annule au point $Z = 0$, ainsi les relations de compatibilité n'entraînent aucune autre singularité que les points A_1 et A_2 . Pour le problème portant, nous allons voir qu'il faut prendre quelques précautions, si on veut encore satisfaire à cette condition:

Supposons d'abord que les points A_1 , A_2 et A'_1 , A'_2 soient des pôles simples pour $\frac{dU}{dZ}$, $\frac{dV}{dZ}$ et $\frac{dW}{dZ}$. On peut alors écrire les valeurs de u , v , w , sur le cercle (C_0) en utilisant les relations (III.45) et (III.46), ainsi que les conditions aux limites. Celles-ci nous font connaître que w prend la valeur w_0 sur les arcs A_1A_2 , $A'_1A'_2$ (fig. 51). D'autre part, la composante u continue nécessairement en dehors du cône (puisque u représente la pression à une constante près) et, impaire en x_3 , doit s'annuler dans le plan Ox_1x_2 , en dehors de l'aile Δ donnée. Par suite $u = 0$ sur le cercle (C_0) , en dehors des arcs A_1A_2 , $A'_1A'_2$. On en déduit, comme précédemment, que, sur A_1A_2 :

$$v = \alpha \cotg \theta'_2, \quad u = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\sinh \theta'_2},$$

mais sur l'arc $A A'_1$:

$$w = \alpha \frac{\sinh \theta'_2 - \sinh \theta'_1}{\sinh \theta'_2}, \quad v = \alpha \frac{\cos \theta'_2 - \cos \theta'_1}{\sinh \theta'_2};$$

remarquons alors que, sur l'arc $A A'_1$, w prend les mêmes valeurs que sur l'arc $A A_1$, alors que v prend des valeurs opposées. On en déduit que la région du plan Ox_1x_2 , comprise entre le bord de fuite Δ_1 et le cône de Mach (voir fig. 52) est alors une région de discontinuité pour la vitesse.

On voit ainsi que l'hypothèse faite (pôles simples pour $\frac{dU}{dZ}$, $\frac{dV}{dZ}$, $\frac{dW}{dZ}$) est incompatible avec le fait que U , V , W , n'admettent pas d'autres singularités que les points A_1 , A_2 , A'_1 , A'_2 . On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement pour satisfaire le plus simplement possible aux conditions aux limites, imposées à $U(Z)$, il suffit d'écrire $U(Z)$ sous la forme:

$$U_1(Z) = -\frac{i\alpha}{\beta\pi\sinh\theta'_2} \log \frac{1-2Z\cos\theta'_1+Z^2}{1-2Z\cos\theta'_2+Z^2},$$

car cette fonction $U_1(Z)$ satisfait bien aux conditions aux limites requises pour la fonction $U(Z)$ sur la circonférence (C_0) . Mais:

$$\frac{dU_1}{dZ} = -\frac{2i\alpha}{\beta\pi\sinh\theta'_2} \left[\frac{Z-\cos\theta'_1}{1-2Z\cos\theta'_1+Z^2} - \frac{Z-\cos\theta'_2}{1-2Z\cos\theta'_2+Z^2} \right],$$

et pour $Z = 0$:

$$\left(\frac{dU_1}{dZ}\right)_{Z=0} = \frac{2 i \alpha}{\beta \pi \sin \theta'_2} (\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2).$$

Si donc on veut que les fonctions $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$ n'admettent pas de singularités à l'intérieur de (C_0) , la solution $U_1(Z)$ ne peut être retenue telle quelle, puisque les fonctions $V_1(Z)$ et $W_1(Z)$ correspondantes auraient un point critique logarithmique à l'origine ⁽¹⁾.

Nous sommes donc conduits à modifier la solution $U_1(Z)$, en introduisant une singularité, en l'un des points A_1 ou A_2 (et, par symétrie en A'_1 ou A'_2). Physiquement, en vertu de la règle des signaux interdits, il faut placer cette singularité au couple de points A_1, A'_1 , car la génératrice limite Δ_2 (fig. 52) qui tient lieu de bord d'attaque (ayant pour image le couple de points A_2, A'_2 dans le plan Z) est indépendante (voir N° 1.2.4.) du bord de fuite (couple de points A_1, A'_1 dans le plan Z). On voit alors qu'en posant :

$$(III.68) \quad U(Z) = -\frac{i \alpha}{\pi \beta \sin \theta'_2} \log \frac{1-2 Z \cos \theta'_1 + Z^2}{1-2 Z \cos \theta'_2 + Z^2} - \frac{2 i \alpha}{\pi \beta \sin \theta'_2} \frac{(\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2) Z}{1-2 Z \cos \theta'_1 + Z^2},$$

on a, pour $U(Z)$, une fonction satisfaisant aux conditions aux limites sur (C_0) , holomorphe à l'intérieur de (C_0) , dont la dérivée s'annule au point $Z = 0$, par suite conduisant à des fonctions $W(Z)$ et $V(Z)$, ne présentant pas de singularités à l'intérieur de (C_0) . D'ailleurs cette solution est unique, si on tient compte du principe des singularités minimum.

On peut alors calculer les fonctions $V(Z)$ et $W(Z)$. On trouve ainsi, pour $W(Z)$:

$$(III.69) \quad W(Z) = -\frac{i \alpha}{\pi} \log \frac{e^{i\theta'_2} Z}{1 - Ze^{i\theta'_2}} + \frac{i \alpha}{\pi \sin \theta'_2} \frac{(1 - \cos \theta'_1 \cos \theta'_2)}{\sin \theta'_1} \log \frac{e^{i\theta'_1} Z}{1 - Ze^{i\theta'_1}} + \\ + \frac{\alpha \cos \theta'_1 - \cos \theta'_2}{\pi \sin \theta'_2} \frac{Z^2 - 1}{1 + Z^2 - 2 Z \cos \theta'_1},$$

et :

$$(III.70) \quad V(Z) = -\frac{i \alpha}{\pi} \cotg \theta'_2 \log \frac{(Z - e^{i\theta'_2})(Z - e^{-i\theta'_2})}{(Z - e^{i\theta'_1})(Z - e^{-i\theta'_1})} + \frac{2 i \alpha \cos \theta'_1}{\pi \sin \theta'_2} \frac{Z(\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2)}{1 + Z^2 - 2 Z \cos \theta'_1}$$

On trouve alors que, sur l'aile (arc $A_1 A_2$), la composante v vaut :

$$v = \alpha \cotg \theta'_2.$$

Dans la région du plan $Ox_1 x_2$, extérieure à l'aile, la composante v est toujours nulle, alors que w prend une valeur constante, sur la partie comprise entre le bord de fuite et le cône (Γ) :

$$w = \alpha \left(1 - \frac{1 - \cos \theta'_1 \cos \theta'_2}{\sin \theta'_2 \sin \theta'_1}\right) = -\alpha \frac{1 - \cos(\theta'_1 - \theta'_2)}{\sin \theta'_1 \sin \theta'_2}.$$

(1) L. BESCHKINE (ref. II) a pris comme valeur de $U(Z)$ la fonction $U_1(Z)$; voir plus loin au N° 3.3.2. la discussion de cette question.

Enfin, dans la partie du plan Ox_1x_2 , intérieure à (Γ) (segment AA'); $v = 0$ et w est donné par la formule :

$$(III.71) \quad w = \frac{\alpha}{\pi} \text{Arc cos} \left(\frac{\cos \theta'_2 - x}{1 - x \cos \theta'_2} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \frac{(1 - \cos \theta'_1 \cos \theta'_2)}{\sinh \theta'_1 \sinh \theta'_2} \text{Arc cos} \left(\frac{\cos \theta'_1 - x}{1 - x \cos \theta'_1} \right) + \\ + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2}{\sinh \theta'_2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 - x \cos \theta'_1}.$$

3.2.4.4. - Problème portant général. -

On voit immédiatement que si l'on désire uniquement calculer la pression sur l'obstacle, on peut utiliser la même formule que pour le problème symétrique général (III.67). D'ailleurs, l'étude des valeurs $U(Z)$, $V(Z)$, et $W(Z)$ dans le cas général, se fera également très simplement par superposition. On vérifiera facilement que si $w = \alpha(\theta)$ est la valeur donnée de la composante normale le long de l'obstacle ($\theta'_1 < \theta < \theta'_2$), on a, par exemple :

$$U(Z) = \frac{i}{\beta \pi} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2 + 0} \log \frac{1+Z^2 - 2Z \cos \theta'_1}{1+Z^2 - 2Z \cos \theta} \frac{d\alpha(\theta)}{\sinh \theta} + \\ + \frac{2iZ}{\beta \pi (1 - 2Z \cos \theta'_1 + Z^2)} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2 + 0} \frac{\cos \theta'_1 - \cos \theta}{\sinh \theta} d\alpha(\theta);$$

et on pourrait écrire des formules analogues pour $V(Z)$ et $W(Z)$.

L'analogie électrique perd donc, dans ce cas, de son intérêt, puisque l'on sait résoudre explicitement le problème. Remarquons simplement que la singularité à placer au bassin au point image du bord de fuite est un doublet.

3.3. - Remarques complémentaires sur les écoulements coniques infiniment aplatis. -

3.3.1. - CONTINUITE DES RESULTATS. -

A la fin de cette étude, il ne sera pas inutile de constater brièvement la continuité des résultats obtenus.

Si par exemple on prend un écoulement élémentaire, débordant le cône de Mach et que l'on fasse tendre θ'_1 vers 0, θ'_2 vers π , on trouve, en faisant le passage à la limite correspondant dans la formule (III.52), comme valeur limite du coefficient de pression :

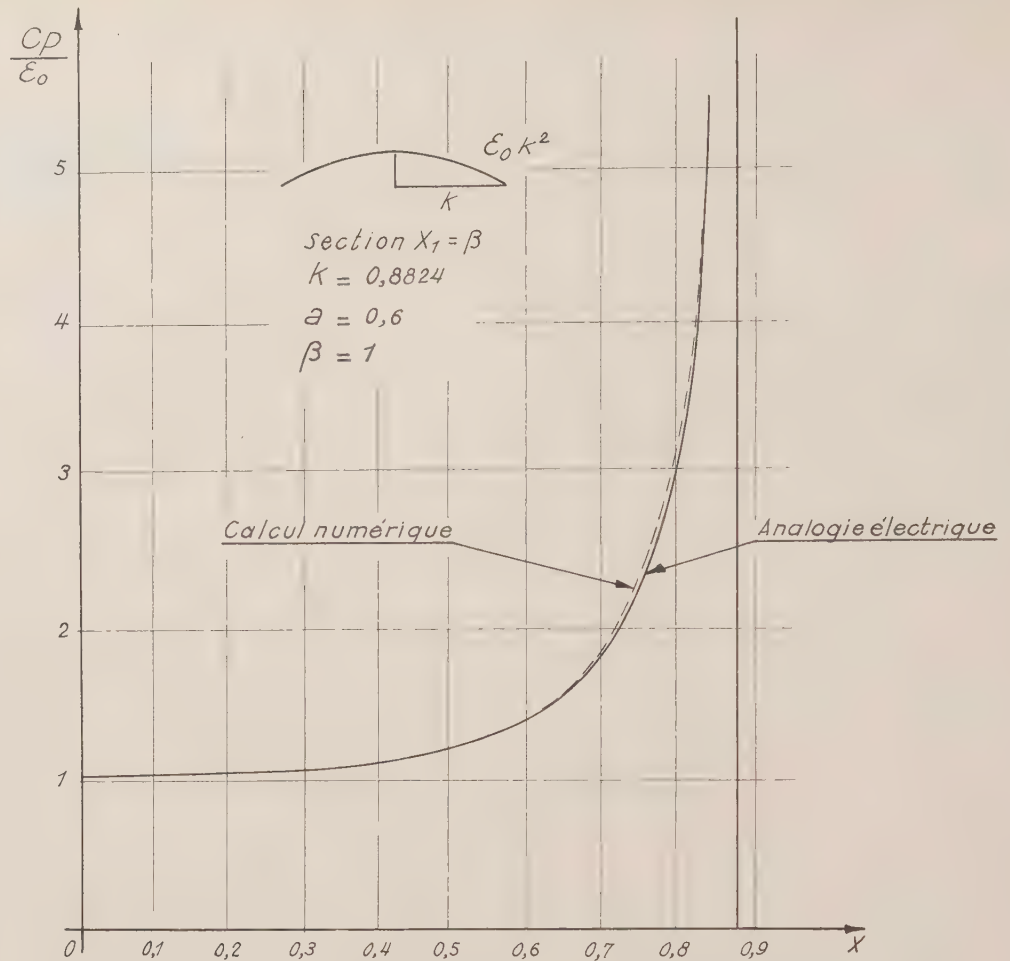


Fig. 53

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\lim_{\theta_1' \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \theta_1'} \text{Arc cos} \frac{\cos \theta_1' - x}{1 - x \cos \theta_1'} + \lim_{\theta_2' \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin \theta_2'} \text{Arc cos} \frac{x - \cos \theta_2'}{1 - x \cos \theta_2'} \right] =$$

(III.72)

$$= \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] = \frac{4\alpha}{\beta\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si maintenant, dans un écoulement élémentaire, symétrique ou portant (voir N° 2.1.2.2. et 3.1.2.3.) on fait tendre b et c , respectivement, vers -1 et 1 , on retrouve la formule (III.72). D'ailleurs la formule (III.72) a déjà été écrite, à la fin du N° 3.1.1.7. On trouve enfin le même résultat en portant également des résultats du N° 3.2.3. Par exemple, si, dans la formule (III.58) on fait tendre θ_1' vers zéro et a vers -1 , on obtient :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\lim_{\theta_1' \rightarrow \theta_1} \frac{1}{\sin \theta_1'} \text{Arc} \frac{\cos \theta_1' - x}{1 - x \cos \theta_1'} + \lim_{a \rightarrow -1} \frac{1}{1 - a^2} \log \left[\frac{a - X}{1 - aX} \right] \right] =$$

$$= \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1-X}{1+X} \right] = \frac{4\alpha}{\beta\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De même, en partant de (III.63), et en faisant tendre a vers -1 , θ_1 vers zéro (φ_1 tend vers zéro) :

$$C_p = \frac{4\alpha}{2\beta\pi} \frac{1-X}{1+X} + \frac{2\alpha}{\beta\pi} \lim_{\substack{\theta_1 \rightarrow 0 \\ x_0 \rightarrow -1}} \frac{1}{\sin \theta_1} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2(x-x_0)(1-\cos \varphi_1)}{1-xx_0-(x-x_0)\cos \varphi_1} \right) =$$

$$= \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\frac{1-X}{1+X} + \lim_{x_0 \rightarrow -1} \sqrt{\frac{2(x-x_0)}{(1+x_0)(1-x)}} \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \right] = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \left[\frac{1-X}{1+X} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right] = \frac{4\alpha}{\beta\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On peut de même vérifier la continuité des résultats, dans l'hypothèse où une seule des génératrices du cône obstacle est située sur le cône de Mach. On obtient ainsi un cas limite entre les écoulements étudiés au N° 3.1.2. et ceux étudiés au N° 3.2.3. Supposons, par exemple, que l'une des génératrices limites ait pour image le point $Z = 1$, la deuxième le point $Z = a$, $-1 < a < 1$, on trouve, quelque soit la manière de faire le passage à la limite pour le problème symétrique :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\pi\beta} \left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{2a}{1-a^2} \log \left[\frac{X-a}{1-aX} \right] \right],$$

et pour le problème portant :

$$C_p = -\frac{4a\alpha}{\beta\pi(1-a)} \frac{1-x}{\sqrt{(x-a)(1-aX)}} + \frac{2\alpha}{\beta\pi} \sqrt{\frac{2(x-x_0)}{(1-x)(1-x_0)}} \frac{4\alpha[X(1+a)^2 - 2a(X^2+1)]}{\beta\pi(1-X)(1-a)\sqrt{(X-a)(1-aX)}}.$$

On vérifiera de même la continuité entre les écoulements étudiés aux numéros 3.2.3. et 3.2.4.

3.3.2.- DISCUSSION SUR LES SINGULARITES POSSIBLES DE PROBLEMES PORTANTS.-

Dans tout ce chapitre, nous nous sommes astreints à donner des solutions qui satisfont à la condition déjà souvent énoncée : *n'admettre, comme singularités dans le plan Z, que les génératrices limites du Δ , et parmi toutes les solutions possibles, choisir la solution répondant au principe des singularités minimum.* Il y a là une hypothèse qui se justifie par sa simplicité et que nous avons faite ici, ne disposant pas de résultats expérimentaux susceptibles de guider notre choix, pour placer les singularités (1). Nous allons rapidement voir quelles sont les possibilités théoriques, lorsqu'on s'affranchit de cette condition.

Une première possibilité théorique consisterait à admettre des singularités possibles sur les génératrices du cône de Mach, ayant pour image les points $Z = \pm 1$, dans le plan Z. Ceci nous paraît difficilement admissible du point de vue physique. D'ailleurs, à notre connaissance, les divers auteurs ayant traité des problèmes d'écoulements coniques, infiniment aplatis ont toujours éliminé cette possibilité (voir, en particulier, ref. 10 et 11). On comprend mal en effet, comment la pression pourrait devenir infinie aux environs de ces génératrices.

(1) L'étude théorique des mouvements, en fluide incompressible, n'a été rendu possible et efficace que grâce à la célèbre hypothèse de Joukowski qui indique le choix à faire parmi les singularités possibles pour le mouvement. Dans l'étude des questions traitées ici, il y a incertitude dans l'état de nos connaissances actuelles sur les conditions auxquelles doit satisfaire la solution théorique pour représenter au mieux les phénomènes réels.

Par contre, il y a moyen d'obtenir des solutions différentes de celles obtenues au cours de cette étude, en tolérant, comme point singulier possible, le point $Z = 0$.

Nous ferons d'abord la remarque générale suivante : prenons le cas d'un cône où une des génératrices limites a pour image le point $Z = 0$ dans le plan Z ; dans ce cas, la pression reste finie au voisinage de la génératrice limite correspondante. Ceci résulte des formules (III.23) et (III.24); dans le cas d'un cône entièrement intérieur à (Γ) (numéro 3.1.2.) et les formules (III.58) et (III.60); dans le cas d'un cône partiellement extérieur et partiellement intérieur à (Γ) , (numéro 3.2.3.). Nous allons montrer que, en utilisant des représentations conformes, conservant le cercle (C_0) , il sera possible même dans le cas où Ox_1 , n'est pas une génératrice limite, de définir une solution du problème portant, telle que la pression reste finie, le long d'une génératrice limite intérieure à (Γ) ; à condition d'admettre le point $Z = 0$, comme point singulier.

Reprenons en effet l'étude du numéro 3.2.3.3. où $a \neq 0$, on peut en effet se ramener au cas où $a = 0$, par les transformations déjà utilisées :

$$\sigma = \frac{Z-a}{1-aZ}, \quad s^2 = \sigma.$$

La fonction $U(s)$ qu'il s'agit de déterminer est alors définie, à l'intérieur du demi cercle et elle satisfait exactement aux mêmes conditions que la fonction $U(s)$, étudiée au numéro 3.2.3.2. On aura donc :

$$(III.73) \quad U(s) = \frac{i w_0}{\beta \pi \sinh \theta_1} \log \frac{(s - e^{i \frac{\varphi_1}{2}}) (s + e^{i \frac{\varphi_1}{2}})}{(s + e^{-i \frac{\varphi_1}{2}}) (s - e^{-i \frac{\varphi_1}{2}})},$$

φ_1 étant défini à partir de θ_1 par l'égalité (III.62). Ceci nous conduit à une valeur du coefficient de pression :

$$C_p = \frac{2a}{\beta \pi \sinh \theta_1} \text{Arc cos} \left[1 - \frac{2(x-x_0)(1-\cos \varphi_1)}{1-xx_0 - (x-x_0)\cos \varphi_1} \right],$$

valeur déjà donnée par BESCHKINE et qui se déduit de la formule (III.63) par suppression du terme en logarithme. Ce coefficient de pression reste fini, le long de la génératrice limite intérieure à (Γ) : $x = x_0$.

Mais, si on calcule les fonctions $W(Z)$ et $V(Z)$, correspondant à la fonction U définie par (III.73), on trouve les résultats suivants :

$$W(s) = w_0 - i \frac{w_0}{\pi} \log \left| \frac{1+s^2 - 2s \cos \frac{\varphi_1}{2}}{1+s^2 + 2s \cos \frac{\varphi_1}{2}} \right| + \frac{w_0}{\pi} \cos \frac{\varphi_1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{(s+i\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{(s+i\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} + \sqrt{a} \log \left| \frac{s\sqrt{a-i}}{s\sqrt{a+i}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right| \right],$$

$$(III.74) \quad V(s) = -i \frac{w_0}{\pi} \cotg \theta_1 \log \left(\frac{s^2 - 1 - 2s \sinh \frac{\varphi_1}{2}}{s^2 - 1 + 2is \sinh \frac{\varphi_1}{2}} \right) - \frac{i w_0}{\pi} \cos \frac{\varphi_1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{(s-i\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{(s+i\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} - \sqrt{a} \log \left| \frac{s\sqrt{a-i}}{s\sqrt{a+i}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right| \right]$$

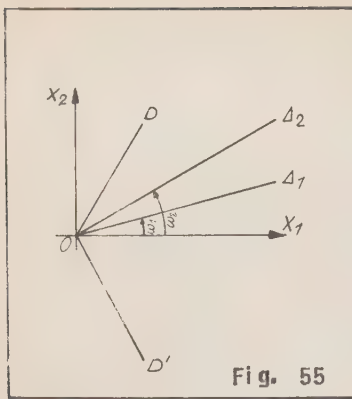


Fig. 55

$$(III.75) \quad U(Z) = \frac{w_0}{\beta} C(b, c) \sqrt{\frac{(Z-b)(1-Zb)}{(c-Z)(1-Zc)}},$$

$C(b, c)$ étant une fonction de b et de c .

On voit alors que, si on calcule $V(Z)$ et $W(Z)$, on trouvera les mêmes particularités que précédemment, le point $Z = 0$ sera un point singulier. Dans la région comprise entre Ox_1 et $O\Delta_1$, on constate une discontinuité de la composante v , alors que la vitesse w devient infinie le long de Ox_1 .

La question qui se pose est la suivante : dans le cas où les deux génératrices limites, $O\Delta_1$ et $O\Delta_2$, sont d'un même côté de Ox_1 , doit-on adopter les solutions exposées au cours de ce chapitre, que nous appellerons solutions du type I (singularités sur $O\Delta_1$ et $O\Delta_2$), ou les solutions que nous venons d'indiquer que nous appellerons solutions du type II (singularités suivant $O\Delta_2$ et Ox_1) ?

Notons tout d'abord que par raison de continuité, il est de toute nécessité d'adopter l'un ou l'autre point de vue complètement; on ne peut admettre une solution du type I pour les écoulements complètement intérieurs, et une solution du type II pour les écoulements partiellement extérieurs et partiellement intérieurs.

Ceci dit, à première vue, les solutions du type II sont assez séduisantes et c'est peut-être en songeant à ces solutions que certains auteurs ont exprimé la condition du bord de fuite subsonique qui pourrait s'énoncer de la façon suivante :

Puisque la tangente au bord de fuite fait, avec le courant, un angle inférieur à l'angle de Mach de l'écoulement, il faut, sur le bord de fuite correspondant, écrire la condition de Joukowski, à savoir que la vitesse reste finie (voir par exemple ref.4).

Or les solutions correspondant aux formules (III.73) et (III.75), semblent répondre à ces conditions. Et comme nous l'avons remarqué, ces écoulements présentent bien, en arrière du bord de fuite, un caractère rappelant les écoulements subsoniques.

Sans vouloir rejeter définitivement ces écoulements, il y a lieu de faire trois remarques.

1) Comme nous avons constaté que les solutions à pression finie, le long du bord de fuite, n'étaient pas possibles pour les problèmes symétriques, la pression ne peut rester finie dans le cas d'un écoulement du type II, autour d'un cône présentant une épaisseur.

2) Il serait dangereux de lier les solutions du type II au "bord de fuite subsonique", car lorsque l'aile est entièrement extérieure au cône (Γ), il existe encore des solutions, donnant une pression finie sur $O\Delta_1$ et donnant naissance à une surface de discontinuité entre Ox_1 et $O\Delta_1$. C'est la solution $U_1(Z)$ envisagée au début du N° 3.2.4.3. On a, en effet, dans cette hypothèse :

$$V_1(Z) = \frac{i\alpha}{\pi \sin \theta_2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \log(-Z) + \frac{i\alpha}{\pi \sin \theta_2} \left[\cos \theta_1 \log(1+Z^2 - 2Z \cos \theta_1) - \cos \theta_2 \log(1+Z^2 - 2Z \cos \theta_2) \right],$$

ce qui donne, dans la région comprise entre Ox_1 et $O\Delta_1$, des valeurs de v égales à :

$$\pm \frac{\alpha}{\sin \theta_2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

Si on adopte, pour un tel cône, la solution portante du type II, on constate que la vitesse reste finie, au bord de fuite, même dans l'hypothèse d'un cône d'épaisseur non nulle.

3) Toujours en vertu du principe de continuité, adopter le type II pour les solutions portantes, dans le cas où les génératrices limites sont d'un même côté de Ox_1 , nous conduirait à restreindre la portée de l'étude des écoulements infiniment peu ouverts faite au chapitre 2, car ce problème tel qu'il a été posé ne serait plus valable dans le cas où le contour (C), dans le plan Z, ne contiendrait plus O à son intérieur. Nous avons déjà, par contre, eu l'occasion de constater que les résultats du chapitre 3 se raccordaient entièrement avec ceux du chapitre 2 (voir N° 2.2.8.) et cette constatation vaut dans n'importe quel cas de figure.

En conclusion, adopter le point de vue des solutions du type II, dans l'état actuel de nos connaissances, ne semble pas s'imposer. Une étude expérimentale peut seule, à notre avis, indiquer où le théoricien doit placer ses singularités, le point de vue adopté dans ce chapitre nous semble le plus naturel. Il s'impose dans le cas où Ox_1 est compris dans l'angle $O\Delta_1$ et $O\Delta_2$; dans le cas contraire, si d'une manière ou d'une autre, une connaissance plus approfondie du phénomène physique nous conduit à changer nos hypothèses sur les singularités, il sera toujours facile d'obtenir les solutions désirées, pourvu que l'on conserve le caractère conique de l'écoulement.⁽¹⁾

(1) Voir Annexe n° 4

4.- LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS CONIQUES ET SES APPLICATIONS AU CALCUL AERODYNAMIQUE DES APPAREILS SUPERSONIQUES

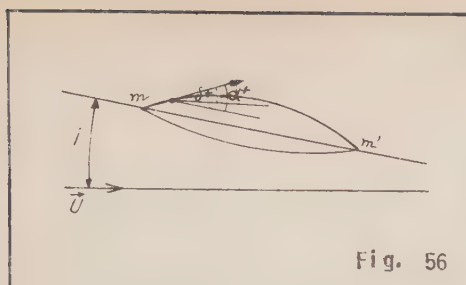
Nous allons montrer dans ce chapitre, comment les mouvements coniques étudiés dans les chapitres précédents, et éventuellement, les mouvements homogènes définis au numéro 1.3 du chapitre I, permettent, par "superposition", d'étudier tout au moins dans certains cas particuliers, les divers éléments d'un appareil supersonique (fuselages, ailes, gouvernes, etc...), lorsque l'on peut appliquer la méthode générale des approximations linéaires. Notre but n'est pas de fournir toutes les applications possibles, ni de donner toutes les formules dont peut avoir besoin le constructeur. Nous insisterons plutôt sur les principes d'une telle composition et nous donnerons les résultats les plus simples et les plus significatifs, et plus spécialement ceux qui, à notre connaissance du moins, ont un caractère de nouveauté. Nous réserverons volontairement, pour une publication ultérieure, les résultats ayant un caractère technique.

La justification d'une telle superposition réside dans le caractère linéaire de l'équation fondamentale (I.10). La simplicité des raisonnements qui vont être faits résulte souvent de la règle des "signaux interdits", sur laquelle nous avons déjà insisté au numéro 1.1.4.

4.1.- Application des mouvements coniques au calcul des ailes.-

Dans son mémoire fondamental, déjà souvent cité (ref.4); TH. von Karman indique que la théorie des mouvements coniques permet l'étude des ailes dont les profils sont formés de lignes droites ⁽¹⁾. Nous nous proposons dans ce paragraphe, de montrer que, par composition de mouvements coniques, on peut faire l'étude d'une aile d'envergure finie, ayant un profil curviligne. Comme les problèmes d'écoulements coniques (voir chapitre III), un problème d'aile peut se décomposer en problème symétrique et problème portant.

(1) Un certain nombre de mémoires ont pour objet l'étude des ailes dont le profil est polygonal. Il faut alors superposer un nombre fini d'écoulements coniques. L'étude la plus récente et la plus complète de cette question est celle de A.E. PUKETT et de H.J. STEWART (ref.30).



Nous noterons $\delta^+(x_1, x_2)$ et $\delta^-(x_1, x_2)$, les pentes des profils extrados ($x_3 = +0$) et intrados ($x_3 = -0$) de l'aile étudiée, et nous poserons (voir fig. 56) :

$$\delta^+ = -i + \alpha^+, \quad \delta^- = -i + \alpha^-,$$

i représentant l'incidence générale de l'aile (on la définira comme l'incidence de la corde de l'une des sections). Nous poserons ensuite :

$$j_0(x_1, x_2) = \frac{\alpha^+ + \alpha^-}{2}, \quad \alpha = \frac{\alpha^+ - \alpha^-}{2}.$$

Dans le cas d'un problème purement symétrique :

$$i = 0, \quad j_0 = 0;$$

dans le cas d'un problème purement portant :

$$\alpha = 0$$

Soient C_p^- et C_p^+ les coefficients de pression sur l'intrados et l'extrados de l'aile. On définira le c_z local et le c_x local d'une section parallèle à Ox_1x_3 par (voir figure 56) :

$$c_z = \int_{mm'} (C_p^- - C_p^+) dx_1,$$

$$c_x = \int_{mm'} (C_p^+ \delta^+ - C_p^- \delta^-) dx_1.$$

Désignons par $C_p^{(1)}$ et $C_p^{(2)}$, les coefficients de pression obtenus dans l'étude de problèmes symétrique et portant dont la superposition donne le problème général étudié, on a :

$$C_p^+ = C_p^{(1)} + C_p^{(2)}, \quad C_p^- = C_p^{(1)} - C_p^{(2)},$$

et par suite :

$$c_z = c_z^{(2)},$$

le $c_z^{(2)}$ étant le c_z local du problème portant et :

$$\begin{aligned} c_x &= \int_{mm'} C_p^{(1)} (\alpha^+ - \alpha^-) dx_1 + \int_{mm'} C_p^{(2)} (-2i + \alpha^+ + \alpha^-) dx_1 \\ &= 2 \int_{mm'} C_p^{(1)} \alpha dx + 2 \int_{mm'} C_p^{(2)} (-i + j_0) dx_1 \\ &= c_x^{(1)} + c_x^{(2)}, \end{aligned}$$

$c_x^{(1)}$ et $c_x^{(2)}$ désignant les c_x locaux des problèmes symétrique et portant ⁽¹⁾.

(voir renvoi 1 page 120 .../

Naturellement, en désignant par C_z et C_x les coefficients de portance et de traînée globales, on aura :

$$C_z = C_z^{(2)}, \quad C_x = C_x^{(1)} + C_x^{(2)}.$$

On voit ainsi très clairement comment un problème général se décompose en un problème symétrique et un problème portant. On peut dire, de façon imagée, que le problème symétrique étudie "l'effet d'épaisseur" et que le problème portant étudie "l'effet de courbure et d'incidence". Nous traiterons successivement ces deux problèmes.

4.1.1. - PROBLEME SYMETRIQUE. -

4.1.1.1. - Aile rectangulaire à profil symétrique et à portance nulle.

4.1.1.1.1. - Remarques générales.

L'aile se projette suivant un rectangle (R) : ABA'B' (voir fig. 57). Nous poserons :

$$AA' = BB' = l, \quad AB = A'B' = \lambda l.$$

Il s'agit de trouver un écoulement tel que la valeur de la composante normale w soit nulle en tout point du plan $x_3 = 0$, sauf dans (R). Nous supposons de plus, pour commencer, que l'aile est engendrée par un profil constant en envergure. Ce profil, symétrique par hypothèse, sera défini par la fonction $\alpha(x_1)$ donnant la valeur de la pente du profil (supposée petite) avec l'axe des x_1 ; w doit donc prendre sur la face supérieure ($x_3 > 0$) du rectangle ABB'A' la valeur $w^+ = \alpha(x_1)$, et sur la face inférieure ($x_3 < 0$) la valeur opposée $w^- = -\alpha(x_1)$.

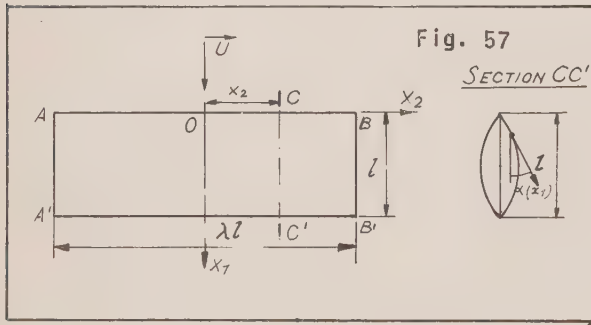


Fig. 57

SECTION CC'

Pour résoudre la question, nous composerons des mouvements coniques dont les sommets seront situés sur les côtés AA' et BB'.

Pour simplifier l'écriture, appelons $\vec{C}_s(M, \alpha)$, l'écoulement conique symétrique élémentaire, ayant son sommet en un point M du plan Ox_1x_2 (voir fig. 58); pour lequel w est nul en dehors du quadrant limité pour les demi-droites, parallèles à Ox_1 et Ox_2 , issues de M, w étant égal à la constante α sur la partie supérieure de ce quadrant et à $-\alpha$ sur la partie inférieure. $\vec{C}_s(M, \alpha)$ désignerait un écoulement analogue, où l'axe Ox_2 aurait été remplacé par son symétrique. Un tel écoulement a été étudié au numéro 3.2.3.2. Si l'on désigne par φ l'angle $\widehat{x_1MP}$, les formules (III.59) nous apprennent que le coefficient de pression C_p est donné par :

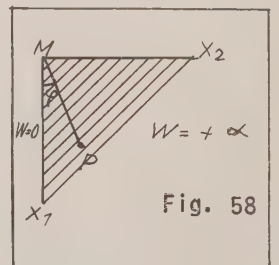


Fig. 58

(1) On pourrait poser : $c_x^{(2)} = c_x^{(2)} + i c_z$, en notant $c_x^{(2)} = 2 \int_{mm} c_p^{(2)} j_0 dx_1$. Le c_x local est donc la somme de $c^{(1)}$, traînée due à l'épaisseur, $c^{(2)}$, traînée due à la courbure et de $i c_z$, traînée due à l'incidence (traînée induite).

(IV.1)

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arc sin}(\beta \text{ tg } \varphi) \right], \quad \left| \beta \text{ tg } \varphi \right| < 1$$

$$C_p = 0 \quad \text{si } \beta \text{ tg } \varphi < -1; \quad C_p = -\frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{si } \beta \text{ tg } \varphi > 1.$$

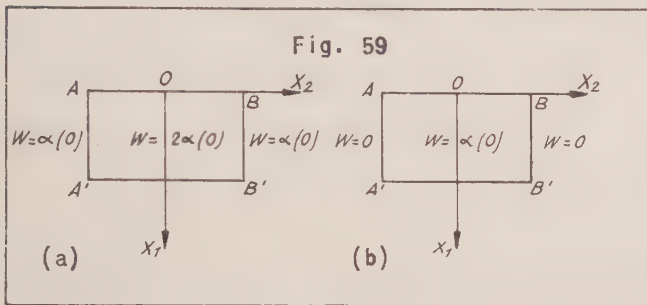
4.1.1.1.2. — Principe général de la superposition:

Envisageons, tout d'abord, la superposition des écoulements suivants :

$$\vec{C}_s [A, \alpha(0)] \quad \text{et} \quad \vec{C}_s [B, \alpha(0)],$$

l'écoulement résultant donne, dans le plan $x_3 = 0$, les valeurs de w indiquées par la figure (59.a). Si maintenant nous retranchons l'écoulement bidimensionnel autour d'un dièdre d'angle $2\alpha(0)$, disposé symétriquement par rapport au plan Ox_1, x_2 , ayant Ox_2 comme arête et la demi droite Ox_1 étant intérieure au dièdre,

on obtient, dans le plan $x_3 = +0$, les valeurs de w indiquées par la figure (59.b). Ceci nous fournit le principe de la composition. L'écoulement cherché s'obtiendra, en superposant des écoulements coniques du type $\vec{C}_s$ dont les sommets M seront situés sur AA', des écoulements coniques du type $\vec{C}_s$ dont les sommets M seront situés sur BB', et en retranchant des écoulements bidimensionnels convenables. D'une façon précise, l'écoulement pourra être schématisé de la façon suivante :



maté de la façon suivante :

$$(IV.2) \quad \int_{AA'} \vec{C}_s (M, d\alpha) + \int_{BB'} \vec{C}_s (M, d\alpha) - E [\alpha(x_1)],$$

$E [\alpha(x_1)]$ désignant l'écoulement bidimensionnel autour d'une aile d'envergure infinie, dont le profil est identique au profil de l'aile rectangulaire donnée.

On vérifie, en effet, immédiatement que l'écoulement, défini symboliquement par la formule (IV.2), satisfait aux conditions aux limites données. Précisons toutefois que les intégrales de cette formule doivent s'entendre au sens de Stieljes, pour comprendre le cas où la fonction $\alpha(x_1)$ présenterait des discontinuités de première espèce. De telles discontinuités existent en général, au bord d'attaque AB et au bord de fuite A'B'.

4.1.1.1.3. — Etude de l'écoulement. $\int_{AA'} \vec{C}_s (M, d\alpha)$

Pour faire cette étude, introduisons des axes Axy, Ax parallèle à Ox_1 , Ay confondu avec Ox_2 , et posons :

$$\frac{x}{l} = x^*, \quad \frac{\beta y}{l} = y^*, \quad \alpha^*(x^*) = \alpha(x).$$

La section du cône de Mach postérieur du point A est formée de deux demi-droites ayant pour équations :

$$x^* \pm y^* = 0.$$

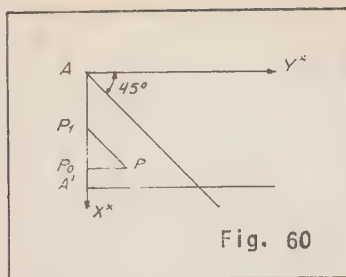


Fig. 60

Soit (x^x, y^x) les coordonnées réduites d'un point P du plan Axy (fig. 60). Nous supposons $x^x < 1$. Si $0 < x^x < y^x$, P se trouve à l'extérieur des cônes de Mach postérieurs de tous les points M du segment AA' , par suite, d'après (IV.1) :

$$C_p(x^x, y^x) = \frac{2}{\beta} \int_0^{x^x} d\alpha = \frac{2}{\beta} \int_0^{x^x} d\alpha^x = \frac{2}{\beta} \alpha^x(x^x).$$

Si maintenant, $0 < y^x < x^x$, le point P se trouve à l'extérieur des cônes de Mach des points du segment P_1P_0 , mais à l'intérieur des cônes de Mach des points situés sur AP_1 , P_1 étant le point de AA' , d'abscisse $x^x - y^x$. D'ailleurs les écoulements coniques dont le sommet se trouve sur P_0A' sont sans influence sur le point P. Par suite, la pression au point P s'écrit, d'après (IV.1) :

$$C_p = \frac{2}{\beta \pi} \int_0^{x^x - y^x} \left(\frac{\pi}{2} + \text{Arc sin} \frac{y^x}{x^x - \xi} \right) d\alpha^x(\xi) + \frac{2}{\beta} \int_{x^x - y^x}^{x^x} d\alpha^x(\xi),$$

ou :

$$(IV.3) \begin{cases} C_p = \frac{1}{\beta} \left[2 \alpha^x(x^x) - P(x^x, y^x) \right], \\ P(x^x, y^x) = \alpha^x(x^x - y^x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{x^x - y^x} \text{Arc sin} \frac{y^x}{x^x - \xi} d\alpha^x(\xi). \end{cases}$$

Cette formule, établie dans le cas où $0 < y^x < x^x$, peut être étendue au cas déjà étudié $0 < x^x < y^x$, puisque α peut être considéré comme nul pour les valeurs négatives de l'abscisse.

On peut maintenant calculer la traînée de la section y^x :

$$c_x(y^x) = 2 \int_0^1 C_p(\xi, y^x) \alpha^x(\xi) d\xi.$$

Par suite :

$$c_x(y^x) = \frac{4}{\beta} \int_0^1 \alpha^{x^2}(\xi) d\xi - \frac{2}{\beta} \int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) \alpha^x(\xi - y^x) d\xi + \frac{4}{\beta \pi} \int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) d\xi \int_0^{\text{Arc sin} \frac{\xi - y^x}{\xi - \eta}} d\alpha^x(\eta);$$

ou encore, en changeant l'ordre d'intégration dans le dernier terme et en posant :

$$\int_0^1 \alpha^{x^2}(\xi) d\xi = \bar{\alpha}^2,$$

$$(IV.4) \begin{cases} F(y^x) = 2 \int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) \alpha^x(\xi - y^x) d\xi - \frac{4}{\pi} \int_0^{1 - y^x} d\alpha^x(\eta) \int_{y^x + \eta}^1 \text{Arc sin} \frac{y^x}{\xi - \eta} \alpha^x(\xi) d\xi, \\ c_x(y^x) = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta} - \frac{1}{\beta} F(y^x). \end{cases}$$

Avec nos conventions, si $y^x \geq 1$:

$$F(y^x) = 0, \quad c_x(y^x) = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta}.$$

Une telle section, en effet, se comporte comme une section d'aile d'envergure infinie, ce qui est bien évident d'après la règle des signaux interdits. Remarquons, en outre, que :

$$c_x(0) = \frac{2 \bar{\alpha}^2}{\beta},$$

la traînée de la section $y^x = 0$ est donc la moitié de la traînée de la même section en allongement infini.

Signalons encore un résultat remarquable :

$$(IV.5) \quad \int_0^1 c_x(y^x) dy^x = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta},$$

c'est-à-dire que la valeur moyenne de la traînée dans la région $0 < y^x < 1$ où le $c_x(y^x)$ n'est pas constant, est égale à la valeur de la traînée en écoulement infini.

En effet, tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy^x \int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) \cdot \alpha^x(\xi - y^x) d\xi &= \int_0^1 \alpha^x(\xi) d\xi \int_0^\xi \alpha^x(\xi - y^x) dy^x = \\ &= \int_0^1 \alpha^x(\xi) e^x(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[e^x(\xi) \right]^2 \Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

si on pose :

$$e^x(x) = \int_0^x \alpha^x(\xi) d\xi.$$

D'autre part :

$$\int_0^1 dy^x \int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) d\xi \int_0^{\xi - y^x} \text{Arc sin} \frac{y^x}{\xi - \eta} d\alpha^x(\eta) = \int_0^1 \alpha^x(\xi) d\xi \int_0^\xi d\alpha^x(\eta) \int_0^{\xi - \eta} \text{Arc sin} \frac{y^x}{\xi - \eta} dy^x.$$

Posons dans la dernière intégrale :

$$y^x = (\xi - \eta) \sin t,$$

l'expression précédente devient égale à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \int_0^1 \alpha^x(\xi) d\xi \int_0^\xi (\xi - \eta) d\alpha^x(\eta) &= \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left[\int_0^1 \xi \alpha^{x^2}(\xi) d\xi - \int_0^1 \alpha^x(\xi) \left[\xi \alpha^x(\xi) - e^x(\xi) \right] d\xi \right] = 0; \end{aligned}$$

la formule (IV.5) se trouve ainsi justifiée.

4.1.1.1.4. - Etude de l'aile rectangulaire à profil constant.

Appelons "allongement réduit" d'une aile rectangulaire, la grandeur $\beta \lambda$ que nous noterons d'ailleurs $2 \eta_0$, ($\beta \lambda = 2 \eta_0$).

Nous désignerons par t la "profondeur réduite" :

$$t = \frac{x}{l},$$

et nous poserons (voir figure 56) :

$$\eta = \frac{\beta x_2}{l} .$$

En appliquant la formule de composition (IV.2), on voit que le coefficient de pression, en un point de l'aile rectangulaire est donné par :

$$(IV.6) \quad C_p(t, \eta) = \frac{2 \alpha^x(t)}{\beta} - \frac{1}{\beta} \left[P(t, \eta_0 + \eta) + P(t, \eta_0 - \eta) \right] ,$$

P étant la fonction définie par la formule (IV.3). La traînée de la section η est donnée par :

$$c_x(\eta) = 4 \frac{\bar{\alpha}^2}{\beta} - \frac{2}{\beta} \int_0^1 \left[P(t, \eta_0 + \eta) + P(t, \eta_0 - \eta) \right] \alpha^x(t) dt ;$$

mais par définition :

$$2 \int_0^1 P(t, u) \alpha^x(t) dt = F(u) ,$$

F étant d'ailleurs la fonction définie par (IV.4). Par suite :

$$(IV.7) \quad c_x(\eta) = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta} - \frac{1}{\beta} \left[F(\eta_0 + \eta) + F(\eta_0 - \eta) \right] ;$$

remarquons que si $\eta_0 > 1$, c'est-à-dire si $\lambda > \frac{2}{\beta}$, il y a toujours, au moins une des fonctions F nulle, et dans ce cas, le c_x des sections voisines du centre est égal à $\frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta}$. Ceci est une conséquence immédiate du principe des signaux interdits.

Enfin, nous pouvons effectuer le calcul de la traînée totale que nous repèrerons par le coefficient :

$$C_x = \frac{1}{2 \eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} c_x(\eta) d\eta .$$

Si on pose :

$$\Phi(v) = \int_0^v F(u) du ,$$

on voit immédiatement que :

$$(IV.8) \quad C_x = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta} - \frac{1}{\beta \eta_0} \Phi(2 \eta_0) .$$

Mais le résultat obtenu par la formule (IV.5) revient à dire que :

$$\Phi(v) = 0 \quad \text{si} \quad v \geq 1 .$$

Par suite :

La traînée d'une aile rectangulaire a une valeur indépendante de l'allongement et égale à $\frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta}$, pour des allongements géométriques λ supérieurs à $\frac{1}{\beta}$.

En résumé, l'étude complète de l'aile rectangulaire symétrique, à la portance nulle, revient à calculer les fonctions P , F , Φ qui se calculent toutes par quadratures.

4.1.1.1.5. Applications.

1) Le profil est un losange; dans ce cas :

$$\begin{aligned}\alpha^x(t) &= \alpha_0, & \text{si } t < \frac{1}{2}, \\ \alpha^x(t) &= -\alpha_0, & \text{si } t > \frac{1}{2}, \quad \bar{\alpha} = \alpha_0.\end{aligned}$$

Calculons la fonction $F(y^x)$, définie par (IV.4). Pour cela, remarquons d'abord que :

$$\int_{y^x}^1 \alpha^x(\xi) \cdot \alpha(\xi - y^x) d\xi = \begin{cases} \alpha_0^2 (1 - 3y^x), & \text{si } 0 \leq y^x \leq \frac{1}{2}, \\ -\alpha_0^2 (1 - y^x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq y^x \leq 1. \end{cases}$$

Il reste à calculer :

$$\int_0^{1-y^x} \alpha^x(\eta) \int_{y^x+\eta}^1 \text{Arc sin} \frac{y^x}{\xi-\eta} \alpha^x(\xi) d\xi d\eta.$$

Mais :

$$\begin{aligned}\int_a^b \text{Arc sin} \frac{y^x}{\xi-\eta} d\xi &= (b-\eta) \text{Arc sin} \frac{y^x}{b-\eta} - (a-\eta) \text{Arc sin} \frac{y^x}{a-\eta} + \\ &+ y^x \left(\text{Arg ch} \frac{b-\eta}{y^x} - \text{Arg ch} \frac{a-\eta}{y^x} \right),\end{aligned}$$

comme on le voit immédiatement, en intégrant par parties.

Si $0 \leq y^x \leq \frac{1}{2}$, $\alpha^x(\eta)$ subit deux discontinuités; la première pour $\eta = 0$, dont la contribution est :

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 \left[\left(\frac{1}{2} \text{Arc sin} 2y^x + y^x \text{Arg ch} \frac{1}{2y^x} - \frac{\pi}{2} y^x \right) - \left(\text{Arc sin} y^x - \frac{1}{2} \text{Arc sin} 2y^x \right) - \right. \\ \left. - y^x \left(\text{Arg ch} \frac{1}{y^x} - \text{Arg ch} \frac{1}{2y^x} \right) \right],\end{aligned}$$

la seconde pour $\eta = \frac{1}{2}$ dont la contribution est :

$$2\alpha_0^2 \left[\frac{1}{2} \text{Arc sin} 2y^x - y^x \frac{\pi}{2} + y^x \text{Arg ch} \frac{1}{2y^x} \right].$$

Si $y^x > \frac{1}{2}$, seule intervient la discontinuité pour $\eta = 0$, dont la contribution est :

$$-\alpha_0^2 \left[\text{Arc sin} y^x - y^x \frac{\pi}{2} + y^x \text{Arg ch} \frac{1}{y^x} \right].$$

En rassemblant ces résultats partiels et en posant :

...

$$(IV.9) \quad \begin{cases} Y(y^x) = \frac{1}{\pi} (\text{Arc sinh } y^x + y^x \text{ Arg ch } \frac{1}{y^x}), & \text{pour } 0 < y^x < 1, \\ Y(y^x) = \frac{1}{2}, & \text{pour } y^x > 1, \end{cases}$$

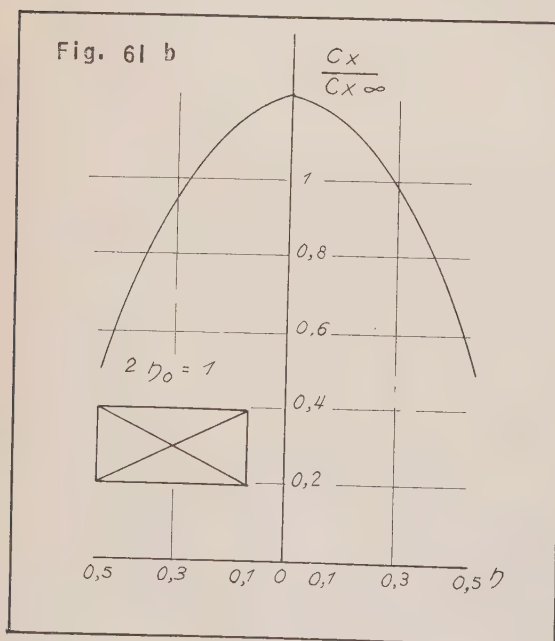
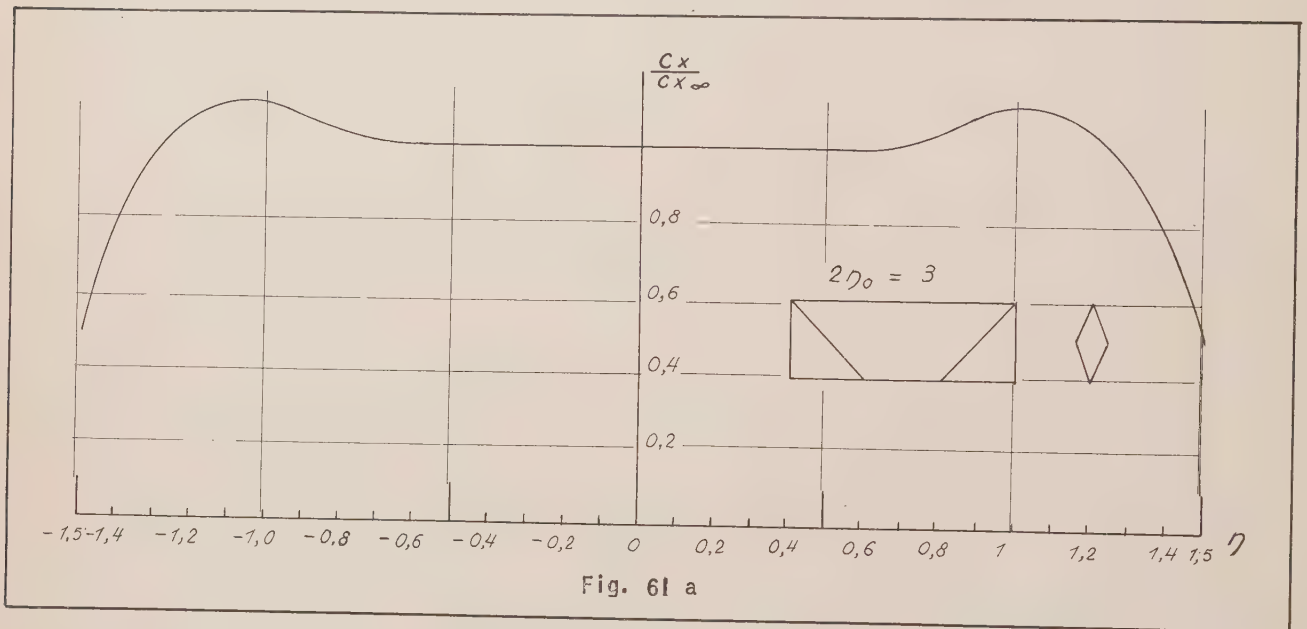
on voit qu'on peut écrire d'une façon générale :

$$F(y^x) = 4 \alpha_o^2 \left[\frac{1}{2} + Y(y^x) - 2 Y(2 y^x) \right],$$

et par suite :

$$(IV.10) \quad c_x(\eta) = \frac{4 \alpha_o^2}{\beta} \left[\frac{1}{2} - Y(\eta_o + \eta) - Y(\eta_o - \eta) + 2 Y(2 \eta_o + 2 \eta) + 2 Y(2 \eta_o - 2 \eta) \right].$$

La figure 61 donne la variation de $c_x(\eta)$ pour deux valeurs de η_o .



Enfin, pour connaître la traînée globale, il suffit de calculer la fonction $\Phi(u)$.

Or :

$$\int_0^u Y(y^x) \cdot dy^x = \frac{1}{2} u \cdot D(u),$$

avec :

$$\begin{cases} D(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + 2 \text{Arc sinh } u + u \text{Arg ch } \frac{1}{u} \right], & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ D(u) = 1, & \text{si } u \geq 1; \end{cases}$$

d'où :

(IV.11)

$$\Phi(u) = 4 \alpha_o^2 \left[\frac{u}{2} [1 + D(u)] - u \cdot D(2u) \right];$$

par suite, en appliquant (IV.8) :

$$(IV.12) \quad C_x = \frac{4 \alpha_o^2}{\beta} \left[2 D(4 \eta_o) - D(2 \eta_o) \right] .$$

On trouvera, *figure 62*, la courbe donnant C_x en fonction de l'allongement réduit.

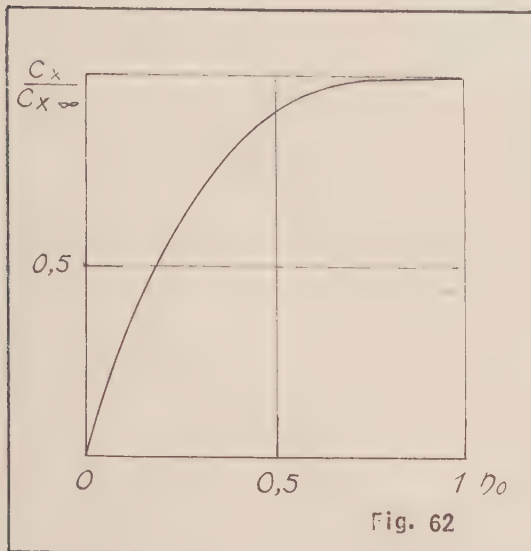


Fig. 62

Les courbes des *figures 61* et *62* ont déjà été données par TH von Karman (ref.4) mais cet auteur ne donne aucune formule analytique. Il semble d'ailleurs que les résultats de TH. von Karman aient été obtenus par application de la méthode "d'analogie acoustique". La courbe donnée *figure 61*, se trouve également dans un mémoire de Lighthill (ref.31), qui a utilisé la méthode des sources.

2) Le profil est formé de deux arcs de parabole symétriques; dans ce cas, il faut poser :

$$\alpha^x(t) = \varepsilon_o (1 - 2t) ,$$

ε_o caractérise l'épaisseur du profil.

Le problème consiste à calculer les fonctions $F(y^x)$ et $\Phi(v)$, définies au numéro précédent. On trouve, après quelques intégrations d'un caractère élémentaire:

$$(IV.13) \quad F(y^x) = \frac{4 \varepsilon_o^2}{3 \pi} \left[\text{Arc cos } y^x + y^x (y^{x2} - 3) \text{ Arg ch } \frac{1}{y^x} + y^x \sqrt{1 - y^{x2}} \right] ,$$

et

$$(IV.14) \quad \Phi(v) = \frac{4 \varepsilon_o^2}{3 \pi} \left[\left(\frac{y^{x4}}{4} - \frac{3 y^{x2}}{2} \right) \text{ Arg ch } \frac{1}{y^x} + y^x \text{ Arc cos } y^x + \frac{y^{x2} \sqrt{1 - y^{x2}}}{4} \right] .$$

D'autre part :

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{\varepsilon_o^2}{3} .$$

On vérifie bien que :

$$F(0) = \frac{2 \varepsilon_o^2}{3} = 2 \bar{\alpha}^2 , \quad F(1) = 0 , \quad \Phi(1) = 0 .$$

On trouvera *figures 63* et *64* la répartition du c_x , en envergure, pour une aile d'allongement réduit $2 \eta_o = 2$, et la variation de C_x (coefficient de traînée globale), en fonction de l'allongement.

4.1.1.1.6. - Cas où le profil est variable en envergure.

Il est possible de calculer l'aile rectangulaire symétrique, à portance nulle dans le cas général où le profil est variable en envergure. Nous nous contenterons ici d'examiner le cas relativement simple, où les profils, le long de l'envergure, se déduisent les uns des autres par une affinité, le rapport d'affinité étant variable en envergure. Nous supposons que l'aile d'envergure réduite $2 \eta_o$ a une pente locale de la forme $k(\eta) \alpha^x(t)$, en un point de coordonnées réduites η, t .

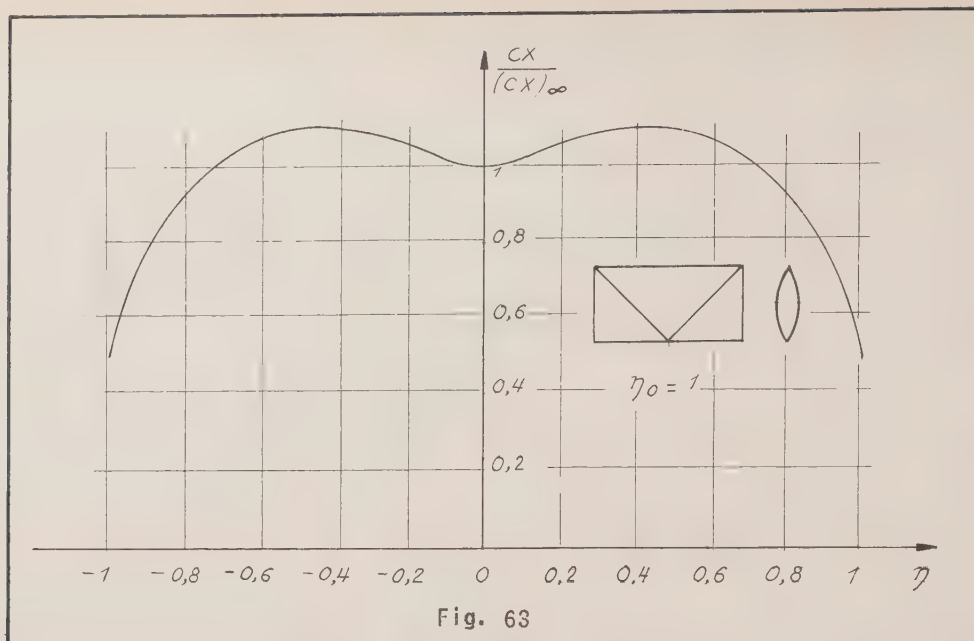


Fig. 63

La fonction $k(\eta)$ doit naturellement satisfaire aux limitations usuelles, pour que le problème posé puisse être traité, au moyen des approximations linéaires. Enfin, nous supposons la fonction $k(\eta)$ paire en η .

Remarquons tout d'abord que l'aile d'envergure réduite 2η , dont le profil, constant en envergure, est défini par la fonction $\alpha^*(t)$, donne lieu, en dehors de l'aile, en un point de coordonnées réduites t, y^* ($y^* > \eta$), à un coefficient de pression :

$$(IV.15) \quad C_p(t, y^*) =$$

$$\frac{1}{\beta} \left[P(t, y^* - \eta) - P(t, y^* + \eta) \right],$$

P étant la fonction définie par (IV.3), comme on le voit en reprenant les raisonnements des numéros 4.1.1.1.3 et 4.1.1.1.4.

Ceci dit, on obtiendra les conditions aux limites voulues, en superposant une succession d'ailes rectangulaires, symétriques par rapport à $O_{11}x_1$, de profondeur réduite égale à 1 et d'envergure réduite, variable 2η ($0 < \eta < \eta_0$), pour lesquelles le profil reste constant en envergure. Ceci se justifie,

puisque $k(\eta)$ a été supposé pair.

En un point (t, y^*) , le coefficient de pression s'écrit :

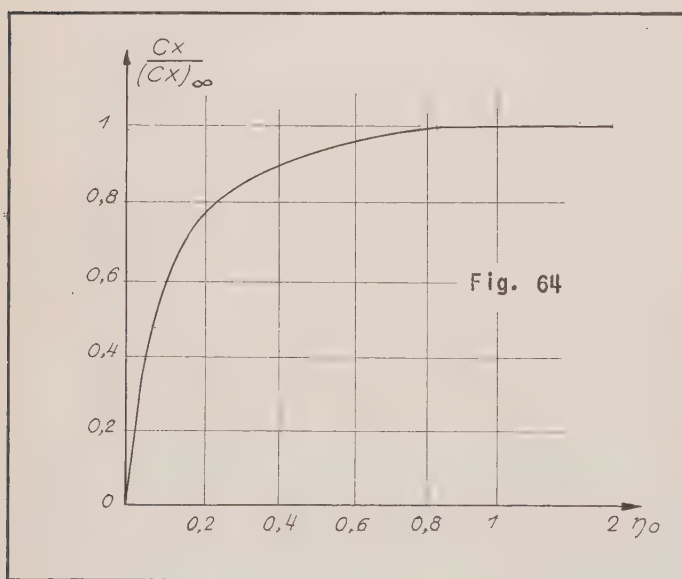


Fig. 64

$$C_p(t, y^x) = \frac{1}{\beta} \left[2 \alpha^x(t) \cdot k(y^x) + \int_0^{\eta_0} P(t, \eta + y^x) dk(\eta) + \right. \\ \left. + \int_{y^x}^{\eta_0} P(t, \eta - y^x) dk(\eta) - \int_0^{y^x} P(t, y^x - \eta) dk(\eta) \right],$$

toutes ces intégrales étant prises au sens de Stieltjes.

On obtiendra une formule plus simple en posant :

$$(IV.16) \quad \mathcal{P}(t, v, \eta_0) = - \int_0^{\eta_0} P[t, \varepsilon(\eta - v)] \varepsilon dk(\eta),$$

ε étant défini par l'égalité :

$$\varepsilon(\eta - v) = |\eta - v|.$$

Dans ce cas :

$$(IV.17) \quad C_p(t, y^x) = \frac{2}{\beta} \alpha^x(t) \cdot k(y^x) - \frac{1}{\beta} \left[\mathcal{P}(t, y^x, \eta_0) + \mathcal{P}(t, -y^x, \eta_0) \right].$$

Cette formule se réduit d'ailleurs à la formule (IV.6) dans le cas où $k(\eta) = 1$ sur toute l'envergnure.

La traînée de la section y^x s'obtient aisément :

$$(IV.18) \quad c_x(y^x) = \frac{4}{\beta} k^2(y^x) \cdot \bar{\alpha}^2 - \frac{k(y^x)}{\beta} \left[\mathcal{F}(y^x, \eta_0) + \mathcal{F}(-y^x, \eta_0) \right],$$

en posant :

$$\mathcal{F}(v, \eta_0) = 2 \int_0^1 \mathcal{P}(t, v, \eta_0) \alpha^x(t) dt = \\ = - \int_0^1 \alpha^x(t) dt \int_0^{\eta_0} P[t, \varepsilon(\eta - v)] \varepsilon dk(\eta) = - \int_0^{\eta_0} \varepsilon dk(\eta) \int_0^1 P[t, \varepsilon(\eta - v)] \alpha^x(t) dt,$$

d'où la formule :

$$(IV.19) \quad \mathcal{F}(v, \eta_0) = - \int_0^{\eta_0} F[\varepsilon(\eta - v)] \varepsilon dk(\eta),$$

F étant la fonction définie par l'égalité (IV.4).

On voit ainsi que le coefficient de pression et de traînée locale s'expriment par les formules analogues aux formules obtenues dans le cas où le profil est constant, à condition de remplacer les fonctions $P(t, y^x)$ et $F(y^x)$ par des moyennes pondérées, $\mathcal{P}(t, v, \eta_0)$ et $\mathcal{F}(v, \eta_0)$, définies par les formules (IV.16) et (IV.19).

Enfin, le coefficient de traînée globale s'obtient immédiatement :

$$C_x = \frac{1}{2 \eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} c_x(y^x) dy^x = \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} c_x(y^x) dy^x,$$

d'où

$$C_x = \frac{4}{\beta} \bar{k}^2 \bar{\alpha}^2 - \frac{1}{\beta} \int_0^{\eta_0} \left[\mathcal{F}(y^x, \eta_0) + \mathcal{F}(-y^x, \eta_0) \right] k(y^x) dy^x.$$

A titre d'exemple, supposons $k(\eta)$ défini par :

...

$$k(\eta) = 1 - \frac{\eta}{\eta_0}, \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0).$$

On aura alors :

$$\mathcal{F}(v, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} F[\varepsilon(\eta-v)] \varepsilon dk(\eta) = + \int_0^{\eta_0} F[\varepsilon(\eta-v)] \frac{\varepsilon}{\eta_0} d\eta.$$

Si v est positif :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v, \eta_0) &= -\frac{1}{\eta_0} \int_0^v F(v-\eta) d\eta + \frac{1}{\eta_0} \int_v^{\eta_0} F(\eta-v) d\eta = \\ &= -\frac{1}{\eta_0} \int_0^v F(u) du + \frac{1}{\eta_0} \int_{\eta_0-v}^{\eta_0} F(u) du = \\ &= \frac{1}{\eta_0} [\Phi(\eta_0-v) - \Phi(v)], \end{aligned}$$

$\Phi(v) = \int_0^v F(u) du$ étant la fonction déjà introduite au numéro 4.1.1.1.4.

Si v est négatif : $v = -v'$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v, \eta_0) &= \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} F(\eta+v') d\eta = \frac{1}{\eta_0} \int_{v'}^{\eta_0+v'} F(u) du = \\ &= \frac{1}{\eta_0} [\Phi(\eta_0-v) - \Phi(-v)]; \end{aligned}$$

d'où :

$$(IV.20) \quad c_x(y^x) = \frac{4}{\beta} \left(1 - \frac{y^x}{\eta_0}\right)^2 \alpha^2 - \left(1 - \frac{y^x}{\eta_0}\right) \frac{1}{\beta \eta_0} [\Phi(\eta_0 - y^x) + \Phi(\eta_0 + y^x) - 2\Phi(y^x)].$$

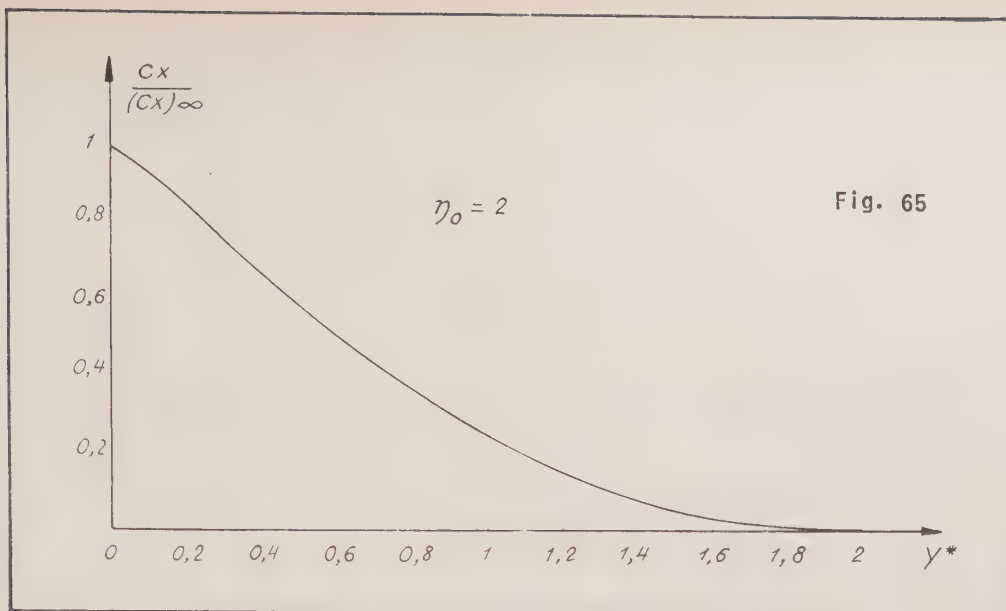
Rappelons que $\Phi(v) = 0$, si $v \geq 1$.

Il est alors facile de faire des applications de cette formule dans le cas où le profil est un losange ou un profil lenticulaire formé de deux arcs de parabole.

On trouvera la courbe donnant dans le premier cas, la variation du c_x en fonction de y^x , pour un allongement réduit $\eta_0=2$, à la figure 65, page 132.

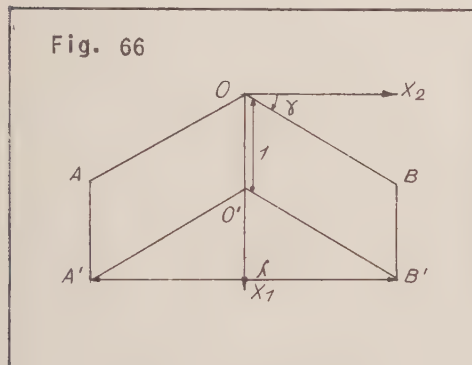
4.1.1.2. — Etude de l'aile en flèche à profil constant.

Sans faire une étude aussi détaillée pour l'aile en flèche que pour l'aile rectangulaire, nous allons montrer que pour l'aile en flèche à profil constant, dont la forme en plan est schématisée par la figure 66, page 131, on peut appliquer sans difficulté essentielle la méthode utilisée pour l'étude de l'aile rectangulaire. Nous supposons que le plan Ox_1x_3 est un plan de symétrie pour l'aile. γ désignant l'angle de flèche, il est évident que nous aurons des écoulements de type différent suivant que le bord d'attaque AOB sera extérieur ou intérieur au cône de Mach de O. On a pris l'habitude de dire que, dans le premier cas, le bord



d'attaque est "supersonique", alors qu'il est "subsonique", dans le deuxième cas, pour rappeler que la composante de la vitesse normale au bord d'attaque, est supérieure à la célérité du son dans le premier cas, inférieure dans le deuxième. Un paramètre essentiel, dans l'étude des ailes en flèche, sera donc le nombre ν défini par :

$$\beta \cot \gamma = \frac{1}{\nu} ,$$



$\nu < 1$ caractérise le cas où le bord d'attaque est extérieur au cône de Mach,

$\nu > 1$ au contraire, celui où il est intérieur,

4.1.1.2.1.- Cas où $\nu < 1$

Nous poserons, dans ce cas, $\nu = \cos \theta$. Nous définirons, comme pour l'aile rectangulaire, "l'allongement réduit" $2\eta_0$ (voir figure 66) par la relation;

$$2\eta_0 = \beta \lambda ,$$

si λ désigne l'envergure de l'aile comptée suivant Ox_2 .

Pour simplifier, nous supposons la corde du profil, prise comme unité de longueur, et le profil défini par la fonction $\alpha(x_1)$, x_1 variant de 0 à 1. Il est évident que l'on obtiendra l'écoulement cherché par une superposition d'écoulements coniques élémentaires que l'on peut noter schématiquement;

$$\int_{OO'} C_s(M, d\alpha, \theta) - \int_{BB'} \overrightarrow{C_s(M, d\alpha, \theta)} - \int_{AA'} \overleftarrow{C_s(M, d\alpha, \theta)} ,$$

$C_s(M, d\alpha, \theta)$ désigne un écoulement débordant totalement le cône de Mach, admettant le plan Ox_1x_3 , comme plan de symétrie (numéro 3.2.2.); $\overrightarrow{C_s(M, d\alpha, \theta)}$ désigne un écoulement partiellement intérieur au cône de Mach, le signe $\overrightarrow{}$ indique la direction de la génératrice limite, faisant l'angle γ avec Ox_2 , l'autre génératrice

limite est supposée parallèle au vent. En raison de la symétrie, il suffira d'étudier la région de l'aile où $x_2 > 0$.

Il sera commode de poser :

$$y^* = \beta x_2 ,$$

$$x_1 = x + y^* \cos \theta .$$

Un écoulement conique de sommet M_0 ($x_1 = \xi$, $x_2 = 0$), du type :

$$C_s (M_0, \alpha, \theta) ,$$

donne lieu (voir formule III.53) au champ de pression suivant dans la région $y^* > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = \frac{4 \alpha}{\beta \pi} \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{Arc} \sin \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-t^2 \cos^2 \theta}} \right] , \text{ si } 0 < t < 1 , \\ t \text{ étant défini par } t = \frac{y^*}{x - \xi + y^* \cos \theta} ; \\ C_p = \frac{2 \alpha}{\beta \sin \theta} , \text{ si } 1 < t < \frac{1}{\cos \theta} , \\ C_p = 0 , \text{ si } t > \frac{1}{\cos \theta} . \end{array} \right.$$

En un point (x, y^*) le coefficient de pression dû aux mouvements : $\int_{00'} C_s (M, d\alpha, \theta)$ est égal à :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta \sin \theta} \left[\alpha(x) - \alpha \left[x - y^* (1 - \cos \theta) \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^{x - y^* (1 - \cos \theta)} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \theta (x - \xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x - \xi) (x - \xi + 2 y^* \cos \theta)}} d\alpha(\xi) \right] = \\ = \frac{2}{\beta \sin \theta} \left[\alpha(x) - Q(x, y^*, \theta) \right] , \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} Q(x, y^*, \theta) &= \alpha \left[x - y^* (1 - \cos \theta) \right] - \frac{2}{\pi} \int_0^{x - y^* (1 - \cos \theta)} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \theta (x - \xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x - \xi) (x - \xi + 2 y^* \cos \theta)}} d\alpha(\xi) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{x - y^* (1 - \cos \theta)} \operatorname{Arc} \cos \frac{[\sin \theta (x - \xi + y^* \cos \theta)]}{\sqrt{(x - \xi) (x - \xi + 2 y^* \cos \theta)}} d\alpha(\xi) . \end{aligned}$$

Notons que :

$$Q(x, y^*, \theta) = 0 , \quad \text{si } y^* (1 - \cos \theta) > x ,$$

et qu'il en est de même dans le cas où la flèche est nulle ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Pour simplifier, nous supposons désormais $\eta_0 > \frac{1}{1+\cos \theta}$ (ce qui sera toujours vérifié si $\eta_0 > 1$), c'est-à-dire que le bord AA' n'a aucune influence sur la région de l'aile $x_2 > 0$.

La contribution due aux écoulements $\int_{BB'}^{\rightarrow} C(M, d\alpha, \theta)$ s'obtient très facilement à partir de la formule (III.58). Le coefficient de pression dû à ces écoulements s'écrit immédiatement :

$$C_p = P(x, \eta_0 - y^*, \theta) \frac{1}{\beta \sin \theta},$$

si on pose :

$$(IV.22) \quad P(x, y^*, \theta) = \alpha \left[x - y^* (1 + \cos \theta) \right] - \frac{2}{\pi} \int_0^{x - y^* (1 + \cos \theta)} \frac{\text{Arc sin} \left[\frac{y^* \sin^2 \theta}{x - \xi} - \cos \theta \right]}{\text{Arc sin} \left[\frac{y^* \sin^2 \theta}{x - \xi} - \cos \theta \right]} d\alpha(\xi).$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retombe sur la fonction P définie par la formule (IV.3); d'autre part P(x, y*, θ) est évidemment nulle si :

$$y^* (1 + \cos \theta) > x.$$

Finalement, en un point de l'aile, sous la réserve que :

$$\eta_0 > \frac{1}{1 + \cos \theta},$$

on a :

$$(IV.23) \quad C_p = \frac{1}{\beta \sin \theta} \left[2 \alpha^*(x) - 2 Q(x, y^*, \theta) - P(x, \eta_0 - y^*, \theta) \right];$$

le coefficient de traînée locale s'obtient immédiatement :

$$(IV.24) \quad c_x(y^*) = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta \sin \theta} - \frac{4}{\beta \sin \theta} G(y^*, \theta) - \frac{1}{\beta \sin \theta} F(\eta_0 - y^*, \theta),$$

en posant :

$$(IV.25) \quad G(y^*, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{y^* (1 - \cos \theta)}^1 \alpha(x) dx \int_0^{x - y^* (1 - \cos \theta)} \frac{\text{Arc cos} \frac{\sin \theta (x - \xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x - \xi)(x - \xi + 2 y^* \cos \theta)}}}{\text{Arc cos} \frac{\sin \theta (x - \xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x - \xi)(x - \xi + 2 y^* \cos \theta)}}} d\alpha(\xi),$$

$$F(y^*, \theta) = 2 \int_{y^* (1 + \cos \theta)}^1 \alpha(x) \alpha \left[x - y^* (1 + \cos \theta) \right] dx -$$

$$(IV.26) \quad - \frac{4}{\pi} \int_{y^* (1 + \cos \theta)}^1 \alpha(x) dx \int_0^{x - y^* (1 + \cos \theta)} \frac{\text{Arc sin} \left[\frac{y^* \sin^2 \theta}{x - \xi} - \cos \theta \right]}{\text{Arc sin} \left[\frac{y^* \sin^2 \theta}{x - \xi} - \cos \theta \right]} d\alpha(\xi).$$

Le calcul de la traînée globale n'offre pas de difficultés. Nous nous contenterons des remarques suivantes :

$$1.- \int_0^{\frac{1}{1 + \cos \theta}} F(y^*, \theta) dy^* = 0.$$

Ce résultat s'établit comme dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$ (voir numéro 4.1.1.1.3.).

Il signifie que l'effet de limitation d'envergure ne modifie pas la traînée globale.

$$2.- \int_0^{\frac{1}{1-\cos\theta}} G(y^x, \theta) dy^x = 0 ;$$

en effet, cette expression est égale à :

$$\int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x d\alpha(\xi) \int_0^{\frac{x-\xi}{1-\cos\theta}} \cos \frac{\sin\theta (x-\xi + y^x \cos\theta)}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^x \cos\theta)}} dy^x ;$$

or la dernière intégrale s'écrit :

$$(x-\xi) \int_0^1 \text{Arc cos} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-t^2 \cos^2\theta}} \frac{dt}{(1-t \cos\theta)^2} ,$$

si l'on pose :

$$t = \frac{y^x}{x-\xi + y^x \cos\theta} ;$$

le résultat est alors immédiat. Il signifie que si $\eta_0 > \frac{1}{1-\cos\theta}$, la traînée de l'aile étudiée est identique à celle de l'aile d'envergure infinie, placée en attaque oblique :

$$(IV.27) \quad C_x = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta \sin\theta} .$$

3.- Si $\theta = 0$ (le bord d'attaque est situé sur le cône de Mach de 0); les formules données présentent une forme indéterminée. Toutefois, il est très facile de lever l'indétermination. Nous allons, en particulier, calculer la traînée globale. La valeur que nous obtiendrons est très intéressante, car elle correspond, pour une aile en flèche donnée, au maximum de la traînée globale lorsque varie le nombre de Mach.

Si θ tend vers zéro, $\frac{1}{\sin\theta} \text{Arc sin} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-t^2 \cos^2\theta}}$ a pour limite :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x-\xi + y^x}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^x)}} .$$

Supposons $\eta_0 > \frac{1}{2}$; comme nous nous proposons le calcul de la traînée globale, on peut négliger le bord BB'. La traînée globale cherchée, que nous noterons $C_{x_{\max}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} C_{x_{\max}} &= \frac{8}{\beta \pi \eta_0} \int_0^{\eta_0} dy^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x \frac{x-\xi + y^x}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^x)}} d\alpha(\xi) = \\ &= \frac{4}{\beta \pi \eta_0} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x d\alpha(\xi) \int_0^{\eta_0} \frac{x-\xi + y^x}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^x)}} dy^x , \end{aligned}$$

d'où, en effectuant la dernière intégration :

$$(IV.28) \quad C_{x_{\max}} = \frac{4}{3 \pi \beta \eta_0} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x \sqrt{\frac{x-\xi + 2 \eta_0}{x-\xi}} \left[2(x-\xi) + \eta_0 \right] d\alpha(\xi).$$

On obtient ainsi une formule très simple donnant la valeur du C_x global quand $\theta = 0$.

Si le profil est un losange, on voit en écrivant :

$$C_{x_{\max}} = \frac{8}{3 \pi \beta \eta_0} \int_0^1 d\alpha(\xi) \int_{\xi}^1 \sqrt{\frac{x-\xi + 2 \eta_0}{x-\xi}} \left[2(x-\xi) + \eta_0 \right] \alpha(x) dx,$$

que :

$$C_{x_{\max}} = \frac{4 \alpha_0^2}{\beta} \frac{2}{3 \pi \eta_0} \left[4 \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(1) \right],$$

en posant :

$$\Phi(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{x+2\eta_0}{x}} (2x + \eta_0) dx = u^{\frac{1}{2}} (u + 2\eta_0)^{\frac{3}{2}},$$

d'où :

$$(IV.29) \quad C_{x_{\max}} = (C_x)_{\infty} \frac{2}{3 \pi} \left[\frac{(1+4\eta_0)^{\frac{3}{2}} - (1+2\eta_0)^{\frac{3}{2}}}{\eta_0} \right].$$

On trouvera figure 67 la variation de $(C_x)_{\max}$, en fonction de η_0 .

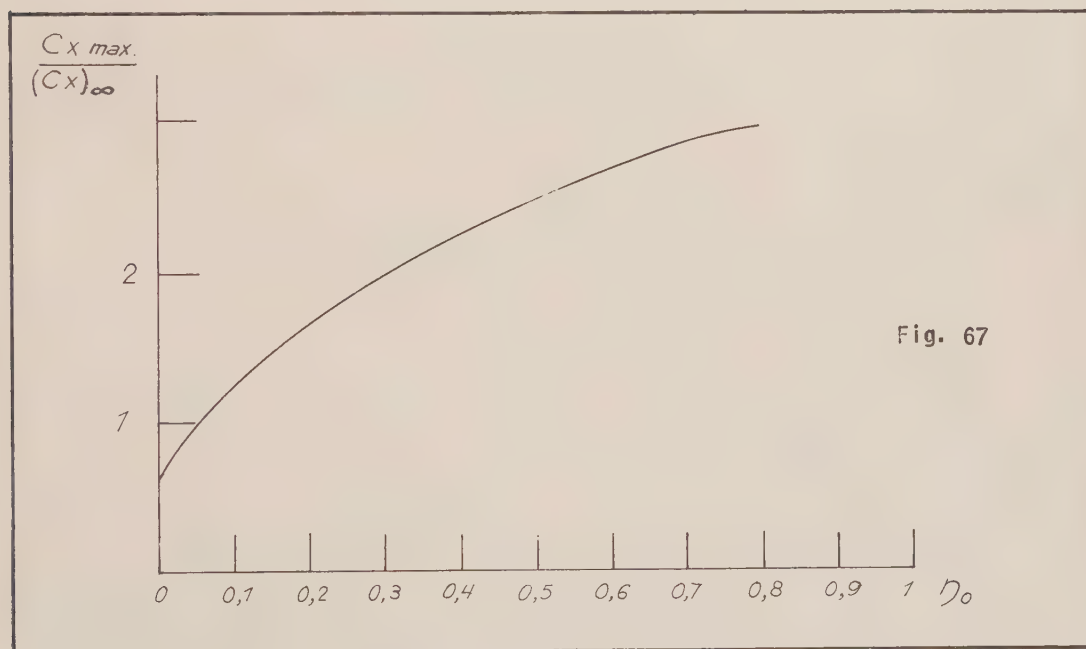


Fig. 67

Si le profil est formé de deux arcs de parabole :

$$\alpha(x) = \varepsilon_0 (1-2x),$$

...

et :

$$C_{x_{\max}} = \frac{8 \varepsilon_o^2}{3 \beta \pi \eta_o} \int_0^1 (1-2x) \left[\sqrt{\frac{x+2\eta_o}{x}} (2x + \eta_o) - 2 \Phi(x) \right] dx ,$$

ou :

$$C_{x_{\max}} = \frac{8 \varepsilon_o^2}{3 \beta \pi \eta_o} \left[4 I(1) - 6 J(1) + 6 \eta_o K(1) + \Phi(1) \right] ,$$

en posant :

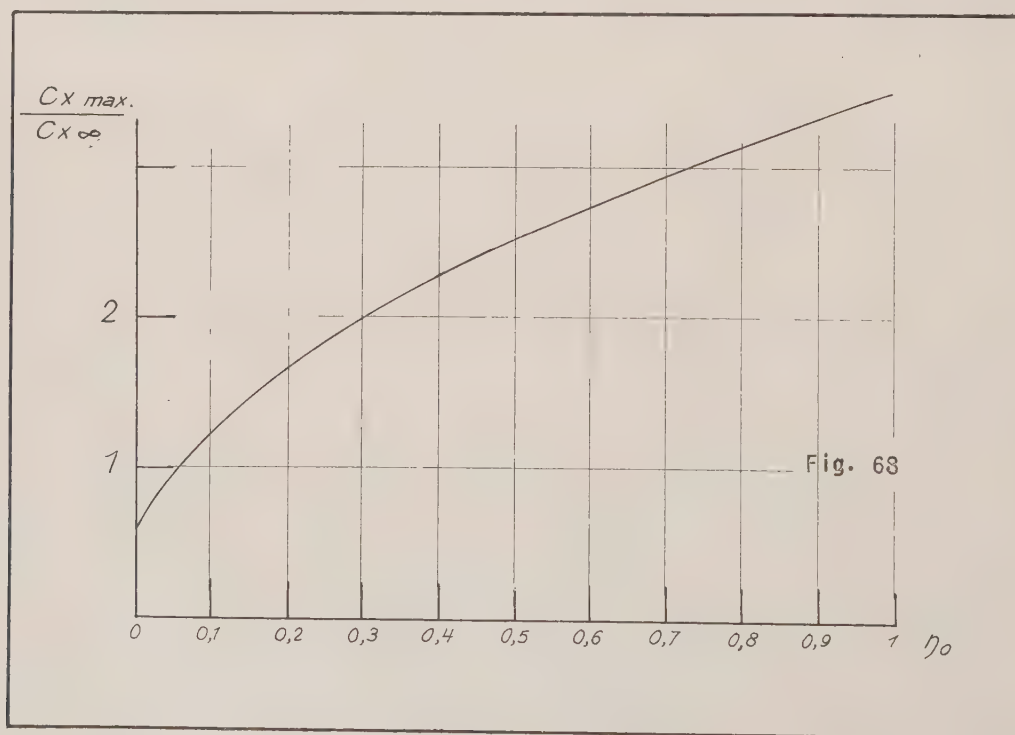
$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{x^2} (x+2\eta_o)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \sqrt{x(x+2\eta_o)} \left[(x+2\eta_o)^2 (x-\eta_o) + \frac{\eta_o^2}{2} (x+5\eta_o) \right] + \frac{3\eta_o^4}{8} \log \frac{x+\eta_o + \sqrt{x(x+2\eta_o)}}{\eta_o} ,$$

$$J(x) = \int_0^x \frac{1}{x^2} (x+2\eta_o)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} \sqrt{x(x+2\eta_o)} \left[(x+2\eta_o)^2 - \frac{\eta_o}{2} (x+2\eta_o) - \frac{3\eta_o^2}{2} \right] - \frac{\eta_o^3}{2} \log \frac{(\eta_o + x + \sqrt{x(x+2\eta_o)})x}{\eta_o} ,$$

$$K(x) = \int_0^x \frac{1}{x^2} (x+2\eta_o)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x(x+2\eta_o)} (x+\eta_o) - \frac{\eta_o^2}{2} \log \frac{\eta_o + x + \sqrt{x(x+2\eta_o)}}{\eta_o} .$$

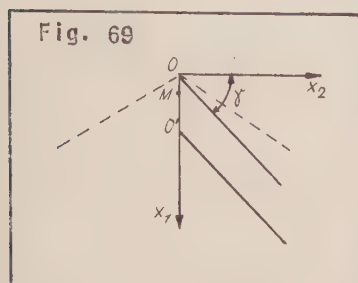
D'où :

$$(IV.30) \quad C_{x_{\max}} = \frac{4 \varepsilon_o^2}{\beta \pi} \left[\sqrt{1+2\eta_o} \left(\eta_o + \frac{2}{3} \right) (1-\eta_o) + \eta_o^3 \log \frac{1+\eta_o + \sqrt{1+2\eta_o}}{\eta_o} \right] .$$

On trouvera la courbe correspondante *figure 68*.

4.1.1.2.2.- Cas où $v > 1$.

Nous commencerons par examiner le cas d'une demi-aile infinie, en dérive (voir figure 69).



Il est commode de poser :

$$v = \frac{1 + c^2}{2c} ;$$

l'écoulement s'obtient par une superposition d'écoulements coniques symbolisée par :

$$(IV.31) \quad \int_{00'} \vec{C}_s (M, d\alpha, c) ,$$

$\vec{C}_s (M, d\alpha, c)$ désignant l'écoulement élémentaire étudié au numéro 3.1.2.2. dans le cas où $b = 0$. Si on pose :

(IV.32)

$$t = \frac{y^x}{x - \xi + v y^x} = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} ,$$

le coefficient de pression est donné par la formule (III.23) qui s'écrit aussi :

$$C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi\sqrt{v^2-1}} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| .$$

Cette formule est valable pour $|\rho| < 1$. Si $|\rho| > 1$, on a $C_p = 0$. On voit immédiatement la différence essentielle avec les cas précédemment étudiés: un écoulement conique de sommet $(\xi, 0)$ peut influencer un point (x, y^x) , pour lequel $x < \xi$. En particulier, le bord de fuite jouera un rôle dans le calcul de la pression. Enfin, si $x = \xi$, $\rho = c$, le C_p de l'écoulement conique correspondant devient infini. Aussi, si la méthode reste exactement la même, doit-on s'attendre à quelques difficultés supplémentaires.

Le coefficient de pression en un point de l'aile s'écrit donc :

$$C_p (x, y^x) = \frac{2}{\beta\pi\sqrt{v^2-1}} \int_0^{x+(v-1)y^x} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\alpha (\xi) ,$$

ρ étant naturellement défini par l'égalité (IV.32).

Le c_x de la section y^x s'écrit alors :

$$c_x (y^x) = \frac{4}{\beta\pi\sqrt{v^2-1}} \int_0^1 \alpha(t) dt \int_0^{t+(v-1)y^x} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\alpha (\xi) ;$$

on remarquera que pour $y^x = 0$, $\rho = 0$; et par suite :

$$C_p (x, 0) = \frac{2\alpha(x)}{\beta\pi\sqrt{v^2-1}} \log \frac{1}{c} = \frac{2\alpha(x)}{\beta\pi\sqrt{v^2-1}} \log \left[v + \sqrt{v^2-1} \right] .$$

Comme dans le cas d'une aile d'envergure infinie, le c_x ne dépend que de la pente locale du profil. De même :

...

$$(IV.33) \quad c_x(0) = \frac{4 \bar{\alpha}^2}{\beta} \frac{\log(v + \sqrt{v^2 - 1})}{\pi \sqrt{v^2 - 1}}.$$

Le calcul de la fonction $c_x(y^x)$, pour $y^x \neq 0$, ne présente aucune difficulté théorique. Nous allons maintenant calculer la traînée de la demi-aile infinie et nous allons montrer qu'elle est finie, bien que les dimensions de l'aile soient infinies. Soit X cette traînée globale, nous poserons :

$$X = \frac{1}{2} \rho |\vec{U}|^2 C_x,$$

et nous nous proposerons le calcul de C_x .

La valeur de C_x cherchée sera la limite, si elle existe, de l'intégrale :

$$I(y_o^x) = \frac{4}{\pi \beta^2 \sqrt{v^2 - 1}} \int_0^{y_o^x} dy^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^{x+(v-1)y^x} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\alpha(\xi),$$

lorsque y_o^x augmente indéfiniment.

Pour calculer cette intégrale triple, nous remplacerons l'ensemble des variables y^x, x, ξ , par les variables x, ξ, ρ ; le déterminant fonctionnel $\frac{D(y^x, x, \xi)}{D(x, \xi, \rho)}$

est égal à :

$$\frac{dy^x}{d\rho} = \frac{2 c^2 (x - \xi) (1 - \rho^2)}{(\rho - c)^2 (1 - \rho c)^2},$$

expression que l'on obtient à partir de (IV.32), lorsqu'on écrit cette égalité sous la forme :

$$y^x = \frac{2 \rho c (x - \xi)}{(c - \rho) (1 - \rho c)}.$$

Le volume dans lequel il s'agit de calculer l'intégrale triple est représenté à la figure 70. On peut écrire :

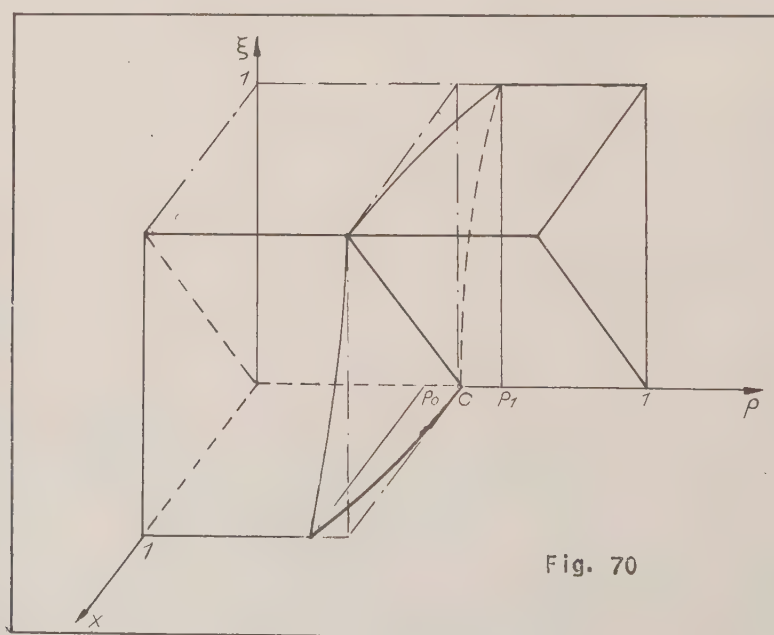


Fig. 70

(IV.34)

$$I(y_o^x) = \frac{4}{\beta^2 \pi \sqrt{v^2-1}} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x (x-\xi) d\alpha(\xi) \int_{\rho_0(x-\xi)}^{\rho_0(x-\xi)} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| \frac{(1-\rho^2) 2c^2}{(\rho-c)^2 (1-c\rho)^2} d\rho +$$

$$+ \int_0^1 \alpha(x) dx \int_x^1 (\xi-x) d\alpha(\xi) \int_{\rho_1(\xi-x)}^1 \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| \frac{(1-\rho^2) 2c^2}{(\rho-c)^2 (1-c\rho)^2} d\rho ;$$

$\rho_0(x-\xi)$ et $\rho_1(\xi-x)$ sont respectivement définis par les égalités :

$$\begin{cases} \frac{2\rho_0}{1+\rho_0^2} = \frac{y_o^x}{x-\xi + v y_o^x} , & x > \xi , \\ \frac{2\rho_1}{1+\rho_1^2} = \frac{y_o^x}{x-\xi + v y_o^x} , & \xi > x . \end{cases}$$

Il faudra ensuite faire tendre y_o^x vers l'infini. Dans ces conditions ρ_0 et ρ_1 tendent vers c ; mais il est impossible de faire brutalement le passage à la limite, car l'intégrale triple prend alors des valeurs indéterminées. Remarquons de même que, si on remplace les deux limites ρ_0 et ρ_1 par deux nombres constants, l'un inférieur à c et l'autre supérieur à c , les intégrales triples de (IV.34) sont nulles car :

$$\int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x (x-\xi) d\alpha(\xi) = 0 ,$$

$$\int_0^1 \alpha(x) dx \int_x^1 (\xi-x) d\alpha(\xi) = 0 .$$

Comme on veut calculer la limite, si elle existe, de $I(y_o^x)$, on pourra utiliser les développements limités. Posons :

$$\rho = c(1+r) ,$$

$$\log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| = \log \left| \frac{1-c^2}{cr} \right| - \frac{c^2 r}{1-c^2} + \dots = \frac{2c^2(1-\rho^2)}{[(c-\rho)(1-\rho c)]^2} = \frac{2}{1-c^2} \frac{1}{r^2} (1+kr^2+\dots) .$$

Désignons par r_0 et r_1 les valeurs de r correspondant à ρ_0 et ρ_1 , on peut négliger dans les intégrales :

$$\int_{\rho_0}^{\rho_0} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| \frac{2c^2(1-\rho^2)}{(\rho-c)^2 (1-\rho c)^2} d\rho , \text{ et } \int_{\rho_1}^{\rho_1} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| \frac{2c^2(1-\rho^2)}{(\rho-c)^2 (1-\rho c)^2} d\rho ,$$

les termes qui sont constants, par rapport à x et ξ , ou infiniment petits, par rapport à r_0 et r_1 . Il y a donc lieu de ne conserver que :

$$\int_{r_0}^{r_0} \left[\frac{2}{1-c^2} \frac{1}{r^2} \log \left| \frac{1-c^2}{cr} \right| - \frac{2c^2}{(1-c^2)^2} \frac{1}{r} \right] c dr ,$$

et :

$$\int_{r_1}^{r_1} \left[\frac{2}{1-c^2} \frac{1}{r^2} \log \left| \frac{1-c^2}{cr} \right| - \frac{2c^2}{(1-c^2)^2} \frac{1}{r} \right] c dr ,$$

ce qui donne pour la première :

$$\frac{2c}{1-c^2} \left[\frac{1}{r_0} \log \left| \frac{c r_0}{1-c^2} \right| + \frac{1}{r_0} - \frac{2c^3}{(1-c^2)^2} \log |r_0| \right] ,$$

et une expression analogue pour l'intégrale $\int_{r_1}$.

Mais si on pose :

$$\frac{x - \xi}{y_0^x} = \varepsilon ,$$

$$r = \frac{\rho - c}{c} = - \frac{\varepsilon}{\sqrt{v^2 - 1}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2c} \frac{1}{v^2 - 1} + \dots \right) ,$$

et on obtient une expression de la forme :

$$\frac{A}{\varepsilon} \log \varepsilon + \frac{B}{\varepsilon} + C \log \varepsilon + \dots ,$$

les points indiquant les termes non infiniment grands, qui peuvent être négligés, suivant une remarque déjà faite.

Le terme en $\frac{1}{\varepsilon} \log \varepsilon$ donne dans la première intégrale triple :

$$y_0^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x d\alpha(\xi) \log |x - \xi| .$$

et dans la seconde (celle qui correspond à ρ_1)

$$y_0^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_x^1 d\alpha(\xi) \log |x - \xi| .$$

D'où, en sommant :

$$y_0^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^1 \log |x - \xi| d\alpha(\xi) = y_0^x \int_0^1 \int_0^1 \frac{\alpha(x) \alpha(\xi)}{x - \xi} dx d\xi = 0 .$$

Le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ apporte dans la première intégrale la contribution :

$$y_0^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x d\alpha(\xi) = \bar{\alpha}^2 y_0^x ,$$

et dans la seconde :

$$y_0^x \int_0^1 \alpha(x) dx \int_x^1 d\alpha(\xi) = -\bar{\alpha}^2 y_0^x .$$

Finalement, seul le terme en $\log \varepsilon$ donne un résultat non nul. Or :

$$C = - \frac{2c}{1-c^2} \left[\frac{c^2}{1-c^2} + \frac{1}{2c\sqrt{v^2-1}} \right] ,$$

et comme :

$$\frac{1}{\sqrt{v^2-1}} = \frac{2c}{1-c^2} ,$$

on voit que l'on obtient :

$$C_x = \frac{4}{\beta^2 \pi} \frac{4 c^2 (1+c^2)}{(1-c^2)^3} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^1 \log |x-\xi| (\xi-x) d\alpha(\xi) .$$

On peut remplacer c par sa valeur en fonction de γ ce qui donne l'expression simple :

$$(IV.35) \quad C_x = \frac{4}{\pi} \frac{\cos^2 \gamma \sin \gamma}{(1-M^2 \cos^2 \gamma)^{3/2}} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^1 (\xi-x) \log |x-\xi| d\alpha(\xi) .$$

Prenons par exemple le cas du profil losangique. On trouve alors immédiatement que l'intégrale double est égale à $\alpha_0^2 \log 2$. Ce résultat, dans le cas particulier d'un profil en losange, a été donné par TH. von Karman (ref.4).

Si on prend le profil formé de deux arcs de parabole :

$$\alpha(x) = \varepsilon (1-2x) ,$$

on trouve comme valeur de l'intégrale double $\varepsilon^2/4 = e^2$, e désignant l'épaisseur relative du profil. A épaisseur relative égale et à flèche égale, les traînées sont dans le rapport $\log 2 = 0,69$, tandis que, pour une aile infinie, droite ou oblique, on obtient le rapport 0,75. On en déduit donc que le profil en losange est plus avantageux encore pour une demi-aile en flèche ⁽¹⁾.

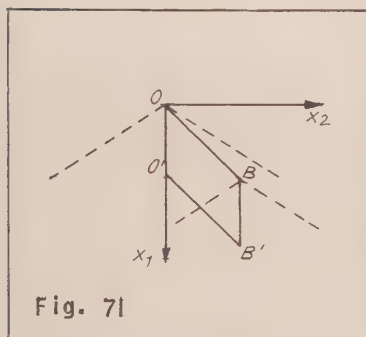


Fig. 71

Si on veut étudier une aile limitée, telle que celle représentée à la figure 71, il faudra ajouter l'effet de bout dû au bord BB'. Il suffit de retrancher à l'écoulement défini par la formule (IV.31), l'écoulement symbolisé par :

$$(IV.36) \quad - \int_{BB'} \vec{C}_s (M, d\alpha, c) ;$$

le coefficient de pression dû à cet écoulement s'écrit :

$$C_p(x, y^x) = - \frac{2}{\beta \pi \sqrt{y^2-1}} \int_0^{\frac{x-(1+\nu)(y_0-y^x)}{1-c\rho}} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\alpha(\xi) ,$$

avec :

$$\frac{2\rho}{1+\rho^2} = \frac{y^x - \eta_0}{x - \xi + \nu(y^x - \eta_0)} ,$$

C_p étant nul si $x < (1+\nu)(\eta_0 - y^x)$.

Si $\eta_0 > \frac{1}{1+\nu}$, le bord BB' n'influence pas le point O'. Dans ce cas, il est facile de montrer que la contribution des mouvements (IV.36) dans la traînée globale est nulle. En effet, cette contribution est proportionnelle à :

...

(1) Si on compare les traînées, en allongement infini, d'un profil formé de deux arcs de parabole et d'un profil en losange, ayant même aire intérieure, la première est les 3/4 de la seconde. Avec une forte flèche, ce rapport est égal à 0,92.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{y}^x} dy^x \int_{(1+\sqrt{y}^x)}^1 \alpha(x) dx \int_0^{x-(1+\sqrt{y}^x)} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\alpha(\xi)$$

si on pose :

$$y^x = \eta_0 - y^x.$$

On peut faire le changement de variables déjà utilisé qui consiste à remplacer y, x, ξ par x, ξ, ρ ; on obtient :

$$\int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^x d\alpha(\xi) (x-\xi) \int_{-1}^0 \frac{2\rho c(1-c^2)}{(\rho-c)^2(1-\rho c)^2} \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| d\rho,$$

qui est manifestement nulle.

Ceci justifie une remarque de TH. von Karman (ref. 4) :

Pour des ailes de grand allongement, on ne fera pas une grande erreur en adoptant pour la traînée globale la formule (IV.35).

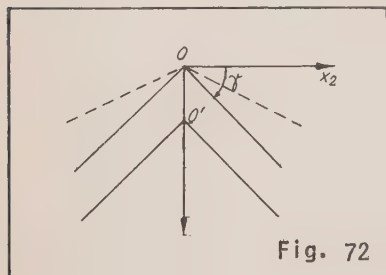


Fig. 72

Le calcul de la traînée d'une aile en flèche infinie (figure 72), dans l'hypothèse où $v > 1$, est tout à fait analogue à celui qui vient d'être fait. Il suffit, d'après le numéro 3.1.2.2. de remplacer, dans les formules précédentes :

$$\log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| \text{ par } \log \left| \frac{1-c\rho}{c-\rho} \right| + \log \left| \frac{1+c\rho}{c+\rho} \right| ;$$

comme :

$$\log \left| \frac{1+c\rho}{c+\rho} \right| = \log \left| \frac{1+c^2}{2c} \right| + \frac{c^2-1}{2(1+c^2)} r,$$

il suffit d'ajouter au coefficient de l'intégrale double de la formule (IV.35) l'expression :

$$\frac{4}{\beta^2 \pi} \frac{c}{\sqrt{y^2-1}} \frac{1}{1+c^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma (1-M^2 \cos^2 \gamma)^{1/2}}.$$

Mais on n'atteint ainsi que la traînée sur la moitié de l'aile ($x_2 > 0$), il faut donc encore multiplier par 2 pour obtenir la formule cherchée :

$$(IV.37) \quad C_x = \frac{4}{\pi} \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} \frac{1+2 \sin^2 \gamma \frac{1}{M^2} \cos^2 \gamma}{(1-M^2 \cos^2 \gamma)^{3/2}} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^1 (\xi-x) \log |x-\xi| d\alpha(\xi).$$

Suivant la remarque qui vient d'être faite, cette formule donne, pour une aile en flèche de grand allongement, une valeur approchée de la traînée totale.⁽¹⁾

Nous emprunterons la figure 73, page 144, au mémoire de Th. von Karman (ref. 4), illustrant l'utilité des formules trouvées, pour l'étude de la variation du C_x d'une aile en flèche de grand allongement avec le nombre de Mach, (le profil est losangique, l'angle de flèche $\gamma = 45^\circ$, et l'allongement réduit $\eta_0 = 4$). Nous avons obtenu au cours de cette étude la valeur du $C_{x_{\max}}$ (point A de la figure), par la formule (IV.29) et la portion de la courbe, à partir de B (formule IV.27).

(1) Voir Annexe n° 5.

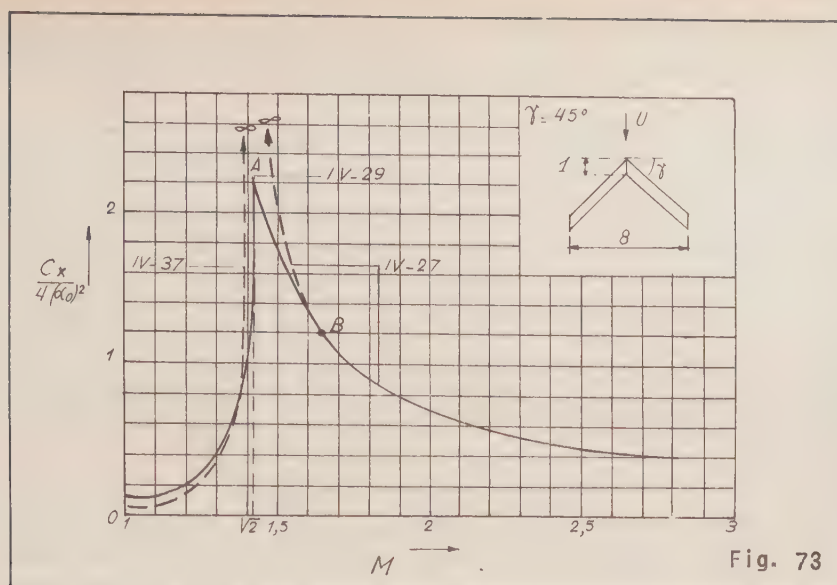


Fig. 73

La partie pointillée à droite de l'abscisse $M = \sqrt{2}$ est calculée par cette même formule. On voit qu'elle donne encore l'allure de la courbe exacte. Enfin, pour les valeurs de $M < \sqrt{2}$, la partie en pointillés correspond à la formule (IV.37). Elle représente une bonne approximation des valeurs rigoureuses, sauf aux environs immédiats de $M = \sqrt{2}$.

Nous arrêterons là l'étude des problèmes d'ailes "symétriques". On voit que cette méthode conduit à des résultats simples et que les calculs sont toujours élémentaires. Le champ des applications peut être facilement étendu à des cas plus généraux (ailes trapézoïdales, bord d'attaque courbe, etc...).

4.1.2.- PROBLEMES PORTANTS.-

L'étude des problèmes portants est, en général, plus délicate. En effet les conditions aux limites fournissent, sur l'aile, les valeurs de w , mais en dehors de l'aile, dans le cas général, w est différent de zéro; par contre, on doit avoir continuité de la pression, ce qui conduit à poser, en vertu des hypothèses de linéarisation comme nous l'avons remarqué au chapitre 3, que $u = 0$ dans le plan Ox_1x_2 à l'extérieur de la région (R) occupée par l'aile. La difficulté réside en ce fait que, dans le cas général, les conditions aux limites portent sur deux des composantes de la vitesse.

4.1.2.1.- Problèmes où la condition $u = 0$ peut être remplacée par $w = 0$.

La règle des "signaux interdits" permet de définir une classe générale de problèmes portants, où la condition $u = 0$ pourra être remplacée par la condition plus simple $w = 0$. Ceci aura lieu pour des ailes dont la projection (R) sur Ox_1x_2 satisfera à la condition suivante :

(C) désignant le contour de la forme en plan (R), en chaque point de (C), la tangente à (C) fait, avec Ox_1 , un angle supérieur à l'angle de Mach.

Naturellement, un tel contour (C) devra présenter des points anguleux. Il est

entendu qu'en ces points chacune des demi tangentes devra satisfaire à la condition énoncée. Pour abrégé, nous dirons que ce contour est entièrement supersonique.

En effet, considérons un point M de (R); comme nous l'avons remarqué au numéro 1.1.4., l'état du fluide en M ne dépend que des perturbations intérieures à l'avant cône de Mach du point M; or cet avant cône découpe, dans Ox_1x_2 , une portion de (R) sur laquelle w est donné, et une portion du plan Ox_1x_2 , dans laquelle le mouvement général n'est pas perturbé (numéro 1.1.4) et sur laquelle $u = v = w = 0$. Pour calculer la pression, en ce point M, on peut supposer que $w = 0$, en dehors de (R). On peut dire encore que, dans ces conditions, l'extrados et l'intrados de l'aile sont indépendants. La résolution des problèmes portants correspondants est donc tout à fait analogue à celle des problèmes symétriques, envisagés au numéro précédent.

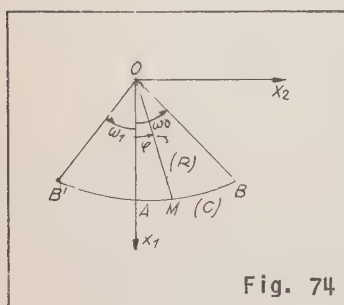


Fig. 74

Soit, par exemple, une plaque plane, ayant la forme en plan indiquée par la figure 74, le contour (C) étant entièrement supersonique; la pression, en chaque point de cette plaque, a été calculée au chapitre 3. Nous nous proposons de calculer le C_z global. On a évidemment :

$$C_z = -\frac{1}{S} \int_{\omega_1}^{\omega_0} C_p r^2 d\varphi ,$$

si on pose :

$$x = \frac{\beta x_2}{x_1} = \beta \operatorname{tg} \varphi , \quad r = OM ,$$

S étant l'aire de la région (R). Posons encore

$$\lambda = \beta \operatorname{tg} \omega_1 , \quad \mu = \beta \operatorname{tg} \omega_0 , \quad P(x) = \frac{\beta r^2}{\beta^2 + x^2} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{\beta} ,$$

P(x) dépend uniquement du bord de fuite B'AB.

On obtient alors la formule :

$$(IV.38) \quad C_z = -\frac{1}{S} \int_{\lambda}^{\mu} C_p(x) P(x) dx .$$

Rappelons que :

$$C_p(x) = \begin{cases} -\frac{2i}{\beta} \frac{1}{\sin \theta_0} & , \text{ si } 1 < x < \mu , \\ -\frac{2i}{\beta} \pi \left(\frac{1}{\sin \theta_0} \operatorname{Arc} \cos \frac{\cos \theta_0 - x}{1 - x \cos \theta_0} + \frac{1}{\sin \theta_1} \operatorname{Arc} \cos \frac{x - \cos \theta_1}{1 - x \cos \theta_1} \right) & , \text{ si } -1 < x < +1 , \\ -\frac{2i}{\beta} \frac{1}{\sin \theta_1} & , \text{ si } \lambda < x < -1 , \end{cases}$$

i désignant l'incidence comptée suivant les conventions usuelles.

Dans un mémoire récent M. Snow (ref.32) a appliqué cette méthode au calcul du C_z global d'une plaque en forme de quadrilatère. Nous voudrions simplement signaler que, dans un certain nombre de cas, il est possible de calculer très

simplement l'intégrale (IV.38). Cette simplification apparaît lorsque $P(x)$ est analytique. Il est alors possible d'utiliser des intégrales dans le champ complexe (variable z ou Z).

Supposons, pour commencer, que le contour $B'AB$ soit rectiligne et que son équation polaire s'écrive :

$$r = \frac{r_0}{\sin(\varphi_0 - \varphi)} ;$$

$$OA = l = \frac{r_0}{\sin \varphi_0} , \quad x_0 = \beta \operatorname{tg} \varphi_0 ,$$

$$S = \frac{l^2}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_0 (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega_1)}{(\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \omega_0) (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \omega_1)} = \frac{l^2}{2 \beta} \frac{x_0^2 (\mu - \lambda)}{(x_0 - \mu)(x_0 - \lambda)} ,$$

$$P(x) = \frac{\beta r_0^2}{\cos^2 \varphi_0 (x - x_0)^2} ,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} C_z &= - \frac{\beta r_0^2}{S \cos^2 \varphi_0} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{C_p(x)}{(x - x_0)^2} dx = \frac{2 \beta r_0^2}{S \cos^2 \varphi_0} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{u(x) dx}{(x - x_0)^2} = \\ &= \frac{2 \beta r_0^2}{S \cos^2 \varphi_0} \mathcal{R} \left[\int_{\lambda}^{\mu} \frac{U(z) dz}{(z - x_0)^2} \right] = - \frac{2 \beta r_0^2}{S \cos^2 \varphi_0} \mathcal{R}(i \pi R_0) , \end{aligned}$$

R_0 désignant le résidu au point $z = x_0$.

Mais :

$$R_0 = \frac{dU}{dz(z=x_0)} = \frac{x_0}{\beta \sqrt{x_0^2 - 1}} \frac{dW}{dz(z=x_0)} = -i \frac{w_0}{\pi \beta} \frac{(\mu - \lambda) x_0}{(x_0 - \lambda)(x_0 - \mu) \sqrt{x_0^2 - 1}} ,$$

et :

$$C_z = - \frac{2 r_0^2}{S \cos^2 \varphi_0} \frac{(\mu - \lambda) x_0 w_0}{(x_0 - \lambda)(x_0 - \mu) \sqrt{x_0^2 - 1}} = - \frac{2 l^2 x_0^2}{\beta^2 S} \frac{(\mu - \lambda) x_0 w_0}{(x_0 - \lambda)(x_0 - \mu) \sqrt{x_0^2 - 1}} ,$$

ou :

$$(IV.39) \quad C_z = - \frac{4 w_0}{\beta} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = - \frac{4i}{\beta} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{M^2 \sin^2 \varphi_0 - 1}} .$$

Le C_z est indépendant de ω_0 et de ω_1 : ceci généralise un résultat déjà trouvé (1) au numéro 3.2.2.2.

Supposons maintenant que l'arc BAB' soit un arc d'ellipse d'équation polaire :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} ,$$

(1) D'une manière générale, on peut obtenir le C_z d'une aile dont la surface est une portion de cône débordant le cône de Mach, de sommet O , ayant un bord de fuite rectiligne, par une mesure d'intensité électrique au bassin. Ce résultat peut s'étendre au cas où le cône a une disposition quelconque par rapport au cône de Mach de O , à condition que le bord de fuite soit rectiligne.

et pour simplifier, supposons que $\omega_0 = -\omega_1$.

$$P(x) = \frac{\beta a^2 b^2}{\beta^2 b^2 + a^2 x^2},$$

d'où :

$$C_z = -\frac{\beta a^2 b^2}{S} \int_{\lambda}^{\mu} \frac{C_p(x) dx}{\beta^2 b^2 + a^2 x^2} = \frac{2 \beta a^2 b^2}{S} \mathcal{R} \left[\int_{\lambda}^{\mu} \frac{U(z) dz}{\beta^2 b^2 + a^2 z^2} \right] =$$

$$= \frac{2 \beta a^2 b^2}{S} \mathcal{R} \left[2 i \pi R_1 \right],$$

R_1 étant le résidu au point $z = i \frac{\beta b}{a}$.

Pour calculer ce résidu, il faut connaître la valeur de U , pour $z = i \frac{\beta b}{a}$; celle-ci s'obtient très facilement, à partir de la formule (III.51). On trouve :

$$U\left(i \frac{\beta b}{a}\right) = -\frac{2 w_0}{\pi \beta \sin \theta} \operatorname{Arc sin} \frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2} \beta^2 \cos^2 \theta};$$

d'autre part :

$$S = ab \operatorname{Arc tg} \frac{a}{b \beta \cos \theta}.$$

Donc, si on pose $w_0 = -i$ (incidence) :

$$(IV.40) \quad C_z = \frac{4 i}{\beta \sin \theta \operatorname{Arc tg} \frac{a}{b \beta \cos \theta}} \operatorname{Arc sin} \frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2} \beta^2 \cos^2 \theta}.$$

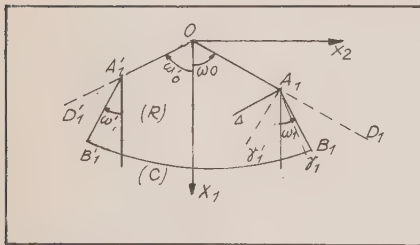


Fig. 75

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que le cas où l'écoulement sur la plaque était conique par suite de la configuration du bord d'attaque. Nous allons examiner, pour terminer ces quelques remarques sur la plaque plane à contour supersonique, le cas où le bord d'attaque est curviligne.

Commençons par le cas d'un bord d'attaque polygonal (figure 75). L'étude repose sur la remarque suivante : si on superpose, en un point A_1 deux écoulements portants élémentaires, débordant totalement le cône de Mach de A_1 , le premier ayant pour génératrices limites $A_1 \Delta$, $A_1 D_1$, tel que $w = -w_0$ sur $(\Delta A_1 D_1)$, le second ayant pour génératrices limites $A_1 \Delta$, $A_1 B_1$ et tel que $w = w_0$ sur $(\Delta A_1 B_1)$, on obtient un écoulement résultant tel que si $A_1 \gamma_1$ et $A_1 \gamma'_1$ sont les sections du cône de Mach de A_1 par le plan $Ox_1 x_2$, $w = 0$ en dehors de l'angle $(B_1 A_1 D_1)$, tandis que $w = -w_0$ sur cet angle; et d'autre part, $u = 0$, en dehors de l'angle $(\gamma'_1 A_1 D_1)$. On vérifie facilement d'ailleurs, que l'écoulement résultant ainsi obtenu est indépendant de la génératrice Δ , (pourvu toutefois que celle-ci soit extérieure à $(\gamma'_1 A_1 \gamma_1)$), et que si on pose comme à l'ordinaire :

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \omega_0}, \quad \cos \theta_1 = \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \omega_1},$$

le coefficient de pression est égal à :

$$\frac{2 w_o}{\beta} \left(\frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\sin \theta_o} \right), \quad \text{sur } \widehat{(\gamma_1 A_1 B_1)},$$

et à :

$$\frac{2 w_o}{\beta \pi} \left(\frac{1}{\sin \theta_1} \text{Arc cos } \frac{\cos \theta_1 - x}{1 - x \cos \theta_1} - \frac{1}{\sin \theta_o} \text{Arc cos } \frac{\cos \theta_o - x}{1 - x \cos \theta_o} \right), \quad \text{sur } \widehat{(\gamma'_1 A_1 \gamma_1)};$$

x représente comme à l'ordinaire une demi-droite intérieure à $\widehat{(\gamma'_1 A_1 \gamma_1)}$.

Nous noterons cet écoulement résultant :

$$\vec{C}(A_1, \theta_o, \theta_o - \theta_1).$$

L'écoulement autour de la plaque, schématisée *figure 75*, s'obtient alors en superposant à l'écoulement conique de sommet O et de génératrices limites OD'₁ et OD₁, les écoulements :

$$\vec{C}(A_1, \theta_o, \theta_o - \theta_1) \quad \text{et} \quad \vec{C}(A'_1, \theta'_o, \theta'_o - \theta'_1),$$

$\theta'_o, \theta'_1, \theta_o, \theta_1$ caractérisant les directions des droites OA', A'₁B', OA₁, A₁B₁.

Si le bord d'attaque est curviligne (*figure 76*), soit A [$x_1(t), x_2(t)$] le point courant de ce bord d'attaque, $\omega(t)$ l'angle de la tangente au point courant avec Ox₁, et posons :

$$\cos \theta(t) = \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \omega(t)}.$$

Soit M (x_1, x_2) le point où l'on cherche à calculer la pression, on posera :

$$x(t) = \beta \frac{x_2(t) - x_2}{x_1(t) - x_1}.$$

L'écoulement s'obtiendra en retranchant de l'écoulement autour d'une plaque en allongement infini, de bord d'attaque Ox₂, les écoulements symbolisés par :

$$\int_{(c)} \vec{C} [A(t), \theta(t), d\theta(t)].$$

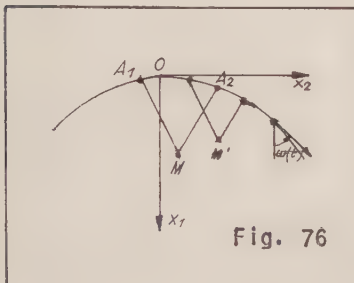
Soit MA₁ et MA₂ les deux demi-génératrices, dans Ox₁x₂, de l'avant cône de Mach au point M, on a donc comme valeur du coefficient de pression en M, en posant :

$$\frac{d}{d\theta} \left| \frac{1}{\sin \theta} \text{Arc cos } \frac{\cos \theta - x}{1 - x \cos \theta} \right| = F(\theta, x),$$

$$(IV.41) \quad C_p(M) = \frac{2 w_o}{\beta} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F[\theta(t), x(t)] d\theta \right].$$

En un point tel que M' (voir *figure 76*), il convient de modifier légèrement la formule; il faut écrire :

$$C_p(M') = \frac{2 w_o}{\beta \sin \theta_1} - \frac{2 w_o}{\beta \pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F[\theta(t), x(t)] d\theta;$$



on obtient ainsi le C_p par une intégrale simple.

Signalons un résultat très remarquable pour le C_z global d'une telle plaque, lorsque le bord de fuite est rectiligne. Nous allons montrer, ce qui généralise le résultat de la formule (IV.39), que le C_z d'une telle plaque ne dépend que du bord de fuite. Il suffit naturellement de démontrer le résultat dans le cas d'un bord d'attaque polygonal, le cas général s'en déduisant par passage à la limite (figure 77). Or, d'après la formule (IV.39), la résultante des efforts normaux dus à l'écoulement :

$$\vec{C}(A_1, \theta_0, \theta_0 - \theta_1)$$

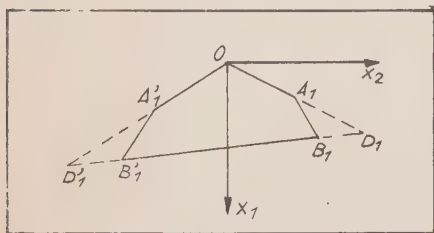


Fig. 77

sur la région (R) est égale à celle des efforts normaux sur le triangle $A_1 B_1 D_1$ dans l'écoulement conique, de sommet O, ayant pour génératrices limites OD_1 , OD_1' . Le résultat énoncé résulte de cette remarque. On vérifie ainsi que, sur cette plaque, le C_z global est le même que si on inversait le sens du courant (1).

4.1.2.2. - Aile rectangulaire infiniment mince.

Nous allons maintenant étudier le cas d'une aile rectangulaire dont le profil se réduit à un arc de courbe (figure 78). Conformément à ce qui a déjà été dit, cet arc de courbe sera défini par l'angle $j_0(x_1)$ que fait la tangente, au point d'abscisse x_1 avec la corde, et si l'aile est à une incidence géométrique définie par l'angle i , nous posons :

$$(IV.42) \quad j(x_1) = j_0(x_1) - i;$$

w doit être égal à $j(x_1)$ sur (R) et u doit être nul à l'extérieur de (R).

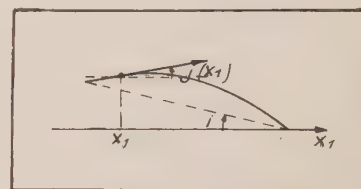


Fig. 78

Nous désignerons par $\vec{C}_p(M, \alpha)$ l'écoulement conique élémentaire portant, de sommet M, fournissant la valeur $w = \alpha$, sur les deux faces du quadrant M, x_1 , x_2 . Avec les notations de la figure 58, la formule (III.60) s'écrit alors :

$$(IV.43) \quad \begin{cases} C_p = \frac{2\alpha}{\beta\pi} \text{ Arc cos } (1 - 2\beta \text{ tg } \varphi) & , \text{ pour } 0 < \beta \text{ tg } \varphi < 1 \\ C_p = \frac{2\alpha}{\beta} & , \text{ pour } \beta \text{ tg } \varphi > 1. \end{cases}$$

Par un raisonnement analogue à celui fait au numéro 4.1.1.1.2. nous sommes portés à définir l'écoulement cherché par la notation symbolique :

$$(IV.44) \quad \int_{AA'} \vec{C}_p(M, dj) + \int_{BB'} \vec{C}_p(M, dj) - E \left[j(x_1) \right].$$

(1) On retrouve ici une remarque déjà faite par M. Snow (ref. 32) dans un cas particulier. Ce résultat peut d'ailleurs s'étendre sans grandes difficultés à une plaque quelconque à contour supersonique.

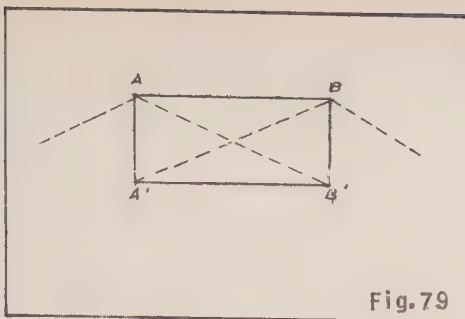


Fig. 79

L'écoulement, ainsi défini, satisfait bien aux conditions relatives à w , mais on voit immédiatement que l'écoulement ne donne une composante u , nulle à l'extérieur de (R) , que dans le cas où l'allongement $\beta \lambda$ est inférieur ou égal à 1. Le cas limite $\beta \lambda = 1$ correspond à la disposition des cônes de Mach donnée par la figure 79. Nous nous placerons ici ⁽¹⁾ dans l'hypothèse où $\beta \lambda \geq 1$ et nous pourrons alors calculer l'écoulement par la formule (IV.44).

4.1.2.2.1.- Etude de l'écoulement :

$$\int_{AA'} \vec{C}_p (M, dj).$$

Nous prendrons les mêmes notations qu'au numéro 4.1.1.1.3. D'après (IV.43) le coefficient de pression C_p en un point (x^*, y^*) s'écrit ⁽²⁾ ($0 < x^* < 1$) :

$$C_p (x^*, y^*) = \frac{2}{\beta} \int_0^{x^*} dj (\xi) = \frac{2}{\beta} j (x^*) , \quad \text{si } 0 < x^* < y^* ,$$

$$C_p (x^*, y^*) = \frac{2}{\beta} \int_{x^*-y^*}^{x^*} dj (\xi) + \frac{2}{\beta} \pi \int_0^{x^*-y^*} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2 y^*}{x^* - \xi} \right) dj (\xi) , \quad \text{si } x^* > y^* .$$

Ces deux formules peuvent s'écrire :

$$C_p = \frac{2}{\beta} \left[j (x^*) - R (x^*, y^*) \right] ,$$

avec :

$$(IV.45) \quad R (x^*, y^*) = j (x^* - y^*) - \frac{1}{\pi} \int_0^{x^* - y^*} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2 y^*}{x^* - \xi} \right) dj (\xi) ,$$

en posant que la fonction $j (x^*)$ est nulle en dehors de l'intervalle $(0, 1)$.

Il nous est facile alors de calculer le c_z local d'une section y^* , ce coefficient étant défini par :

$$c_z (y^*) = - 2 \int_0^1 C_p (x^*, y^*) dx^* .$$

En remarquant que :

$$j (x^*) = j_0 (x^*) - i ,$$

et en posant :

$$f (x^*) = \int_0^{x^*} j_0 (\xi) d\xi , \quad [f (1) = 0] ,$$

on a :

$$c_z = \frac{4 i}{\beta} + \frac{4}{\beta} \int_{y^*}^1 R (x^*, y^*) dx^* ;$$

(1) Le cas où $\beta \lambda < 1$ n'est pas impossible à étudier. Il faut alors superposer à l'écoulement donné par (IV.44) d'autres écoulements coniques dont les sommets décrivent les deux bords de l'aile afin de rétablir la continuité de la pression sans changer la valeur de w sur l'aile. Cette étude est nettement plus compliquée que celle qui va être faite. Nous ne l'aborderons pas afin de nous limiter aux résultats les plus simples. On trouvera plus loin (N°4.1.2.2.2.) une application de ce procédé dans un cas particulier. (voir renvoi 2 page 150 ...)

or :

$$\int_{y^x}^1 R(x^x, y^x) dx^x = \int_{y^x}^1 j(x^x - y^x) dx^x - \frac{1}{\pi} \int_{y^x}^1 dx^x \int_0^{x^x - y^x} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2y^x}{x^x - y^x} \right) dj(\xi) =$$

$$= f(1 - y^x) - i(1 - y^x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{1 - y^x} dj(\xi) \int_{y^x + \xi}^1 \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2y^x}{x^x - y^x} \right) dx^x.$$

Mais :

$$\int_{y^x}^{1 - \xi} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2y^x}{u} \right) du = 2 \left[(1 - \xi) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{1 - \xi}} + \sqrt{y^x (1 - y^x - \xi)} \right] - \pi y^x ;$$

posons alors :

$$(IV.46) \begin{cases} k(y^x, \xi) = \frac{4}{\pi} \left[(1 - \xi) \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{1 - \xi}} + \sqrt{y^x (1 - y^x - \xi)} \right], & \text{si } y^x < 1 - \xi, \\ k(y^x, \xi) = 2(1 - \xi) & , \text{ si } y^x > 1 - \xi, \end{cases}$$

$$\int_{y^x}^1 R(x^x, y^x) dx^x = f(1 - y^x) - i(1 - y^x) + y^x \left[-i + j_0(1 - y^x) \right] - \frac{1}{2} \int_0^{1 - y^x} k(y^x, \xi) dj_0(\xi) =$$

$$= -i + \frac{i}{2} k(y^x, 0) + f(1 - y^x) + y^x j_0(1 - y^x) - \frac{1}{2} \int_0^{1 - y^x} k(y^x, \xi) dj_0(\xi) =$$

$$= -i + \frac{i}{2} k(y^x, 0) + p_0(y^x),$$

avec :

$$(IV.47) \quad p_0(y^x) = f(1 - y^x) + y^x j_0(1 - y^x) - \frac{1}{2} \int_0^{1 - y^x} k^*(y^x, \xi) dj_0(\xi);$$

par suite :

$$(IV.48) \quad c_z(y^x) = \frac{2k(y^x, 0)}{\beta} i + \frac{4}{\beta} p_0(y^x).$$

On trouvera figure 80, page 151, la courbe donnant la variation de $k(y^x, 0)$ et de $k(y^x, 1/2)$.

Remarquons que :

$$\int_0^1 dy^x \int_0^{1 - y^x} k(y^x, \xi) dj_0(\xi) = \int_0^1 dj_0(\xi) \int_0^{1 - \xi} k(y^x, \xi) dy^x = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \xi)^2 dj_0(\xi),$$

car :

$$\int_0^{1 - \xi} k(y^x, \xi) dy^x = \frac{3}{2} (1 - \xi)^2 ;$$

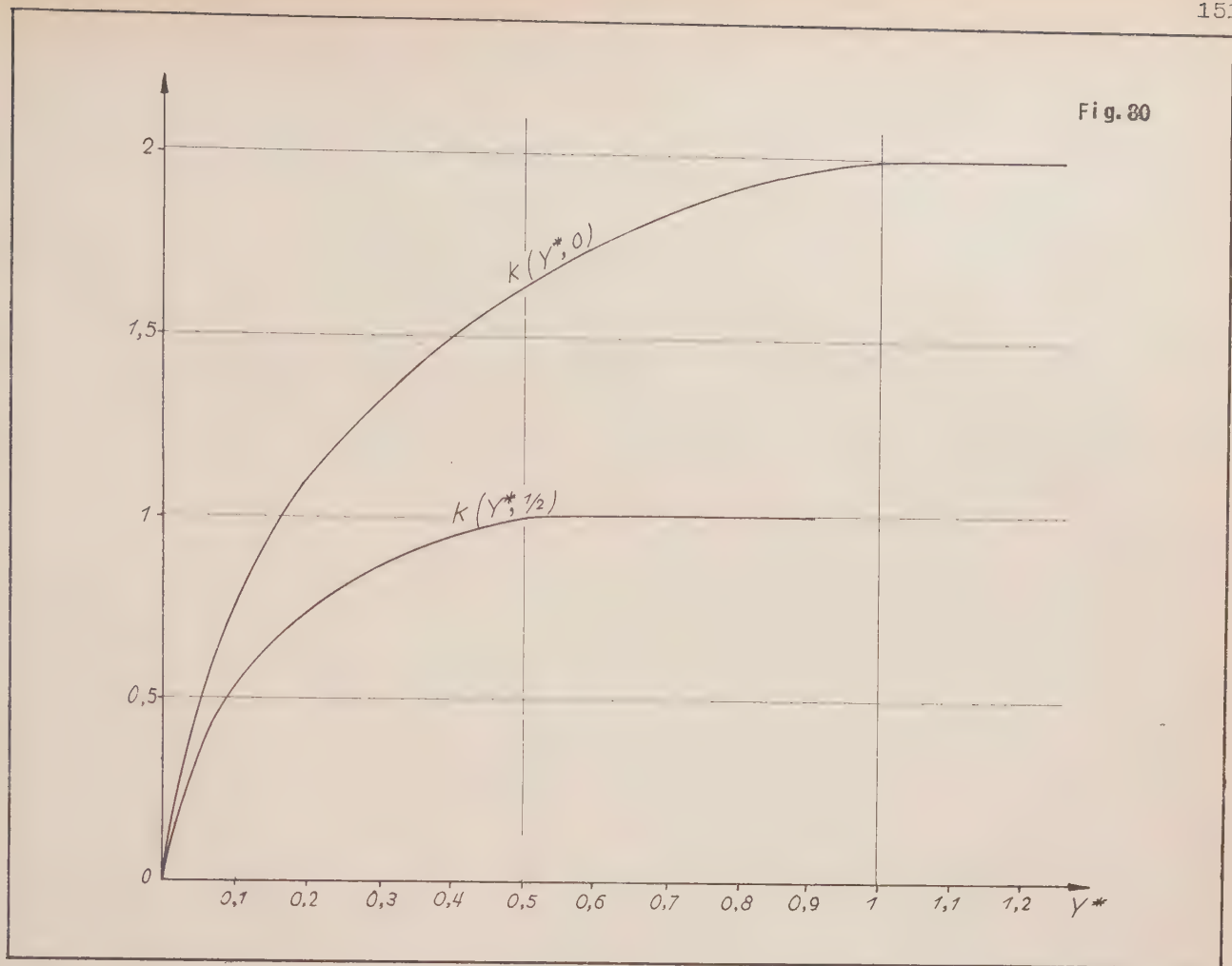
mais :

$$\int_0^1 (1 - \xi)^2 dj_0(\xi) = 2 \int_0^1 (1 - \xi) j_0(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2\mu,$$

en posant :

$$\int_0^1 f(x) dx = \mu;$$

(2) En toute rigueur, la pente de l'aile devrait être notée $j^*(x^x)$ lorsqu'on l'exprime en fonction de l'abscisse réduite. Nous supprimerons l'astérisque pour simplifier les notations.



d'autre part :

$$\int_0^1 f(1-y^x) dy^x = \int_0^1 f(x) dx = \mu ,$$

et :

$$\int_0^1 y^x j_0(1-y^x) dy^x = \int_0^1 (1-t) j_0(t) dt = - \int_0^1 t j_0(t) dt = \mu ;$$

par suite :

$$(IV.49) \quad \int_0^1 c_z(y^x) dy^x = \frac{3i}{\beta} + \frac{2\mu}{\beta} .$$

4.1.2.2.2.- Etude de l'aile rectangulaire mince, dans le cas où $\beta \lambda > 1$.

Comme nous l'avons dit au numéro 4.1.2.2., on peut appliquer à ce cas une méthode analogue à celle employée au numéro 4.1.1.1.4. Le coefficient de pression, en un point de l'aile situé sur la face $x_3 = +0$ de coordonnées réduites t, η , s'écrit immédiatement :

$$C_p(t, \eta) = \frac{2}{\beta} \left[j_0(t) - i - [R(t, \eta_0 + \eta) + R(t, \eta_0 - \eta)] \right] ;$$

par suite, le c_z local de la section η s'obtient par la formule :

$$c_z(\eta) = -2 \int_0^1 C_p(t, \eta) dt =$$

$$= \frac{4i}{\beta} + \frac{4}{\beta} \left[-2i + \frac{i}{2} \left[k(\eta_0 + \eta, 0) + k(\eta_0 - \eta, 0) \right] + p_0(\eta_0 + \eta) + p_0(\eta_0 - \eta) \right],$$

ou :

$$c_z(\eta) = \frac{2i}{\beta} \left[k(\eta_0 + \eta, 0) + k(\eta_0 - \eta, 0) - 2 \right] + \frac{4}{\beta} \left[p_0(\eta_0 + \eta) + p_0(\eta_0 - \eta) \right].$$

les fonctions k et p_0 étant définies par les égalités (IV.46) et (IV.47).

Enfin, calculons le C_z global :

$$C_z = \frac{1}{2\eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} c_z(\eta) d\eta = -\frac{4i}{\beta} + \frac{2i}{\beta\eta_0} \int_0^{2\eta_0} k(t, 0) dt + \frac{4}{\beta\eta_0} \int_0^{2\eta_0} p(t) dt,$$

et comme :

$$2\eta_0 = 1 + \beta\lambda - 1,$$

on a, en appliquant les résultats établis à la fin du paragraphe précédent :

$$C_z = -\frac{4i}{\beta} + \frac{1}{\eta_0} \left(\frac{3i}{\beta} + \frac{2\mu}{\beta} \right) + (\beta\lambda - 1) \frac{4i}{\beta\eta_0},$$

car :

$$k(t, 0) = 2, \quad \text{si } t > 1,$$

d'où :

$$(IV.50) \quad C_z = \frac{4i}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2\beta\lambda} \right) + \frac{4\mu}{\beta^2\lambda}.$$

La figure 81 donne la variation de $\left(\frac{1}{2} \frac{dC_z}{d\lambda} \right)$, en fonction de M , pour diverses valeurs de $\lambda^{(1)}$.

On peut aussi se proposer le calcul de la traînée de cette aile. Tout d'abord la traînée locale :

$$c_x(\eta) = ic_z(\eta) + 2 \int_0^1 C_p(t, \eta) j_0(t) dt,$$

ou :

$$(IV.51) \quad c_x(\eta) = ic_z(\eta) + \frac{4}{\beta} j_0^2 - \frac{4}{\beta} \left[T(\eta_0 + \eta) + T(\eta_0 - \eta) \right],$$

en posant :

$$T(y^x) = \int_{y^x}^1 R(t, y^x) j_0(t) dt =$$

$$= if(y^x) + \int_{y^x}^1 j_0(t - y^x) j_0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{y^x}^1 j_0(t) dt \int_0^{t-y^x} \text{Arc cos} \left(1 - \frac{2y^x}{t-\xi} \right) dj(\xi),$$

d'où :

$$T(y^x) = if(y^x) + \frac{2i}{\pi} \int_{y^x}^1 \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{t}} j_0(t) dt + \int_{y^x}^1 j_0(t - y^x) j_0(t) dt -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{1-y^x} dj_0(\xi) \int_{y^x+\xi}^1 \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{t-\xi}} j_0(t) dt$$

voir renvoi page 153.../

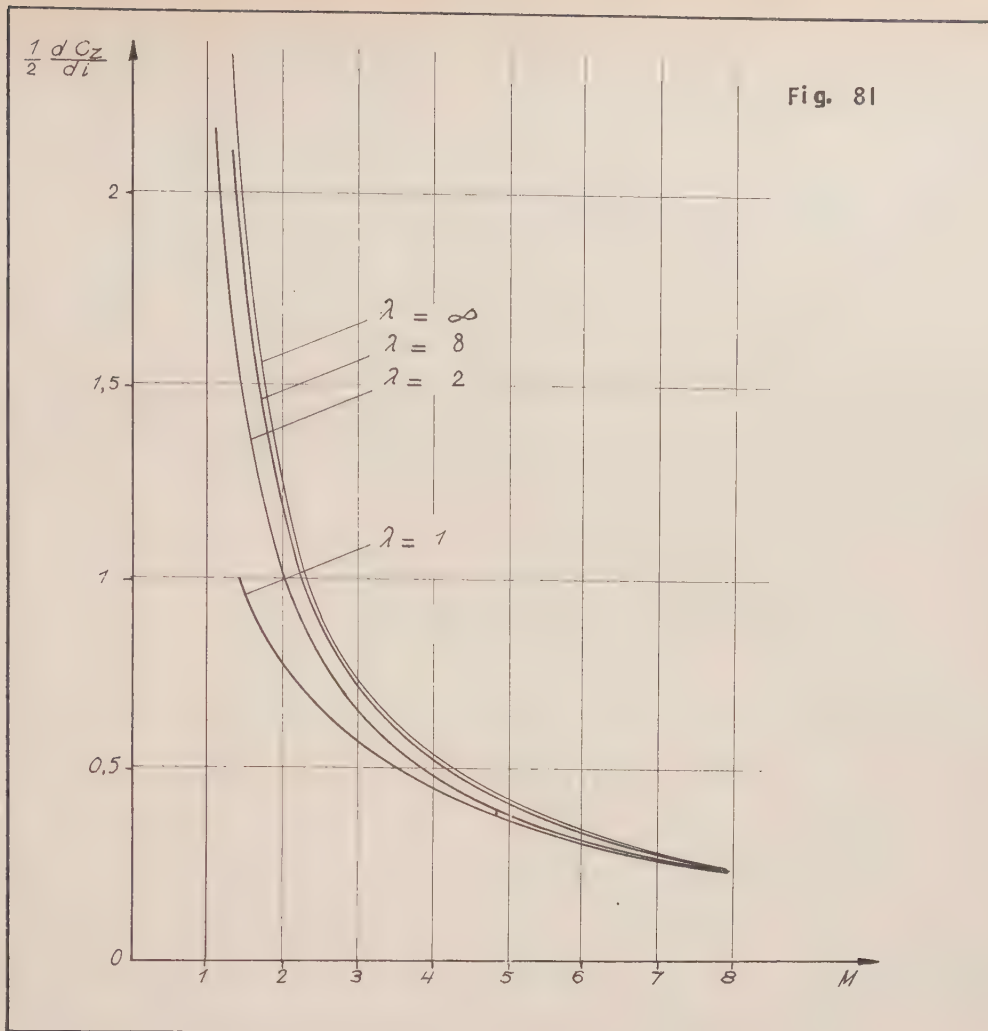


Fig. 81

La traînée totale C_x s'obtiendra en prenant la valeur moyenne :

$$C_x = \frac{1}{2 \eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} c_x(\eta) d\eta = i C_z + \frac{4}{\beta} \bar{j}_0^2 - \frac{4}{\beta \eta_0} \int_0^{\eta_0} T(t) dt,$$

$$C_x = i C_z + \frac{4}{\beta} \bar{j}_0^2 - \frac{4}{\beta \eta_0} \int_0^1 T(t) dt.$$

Il est facile de calculer la valeur moyenne de $T(t)$, dans l'intervalle $(0,1)$ car :

$$\int_0^1 dy^x \int_{y^x}^1 j_0(t-y^x) j_0(t) dt = 0,$$

$$\text{et : } \int_0^1 dy^x \int_0^{1-y^x} dj_0(\xi) \int_{y^x \xi}^1 \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{t-\xi}} j_0(t) dt = \int_0^1 j_0(t) dt \int_0^t dj(\xi) \int_0^{t-\xi} \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^x}{t-\xi}} dy^x = 0;$$

les calculs sont analogues à ceux effectués à la fin du numéro 4.1.1.12.

Mais :

(1) A. Bonney a déjà obtenu cette formule, dans le cas où $j_0 = 0$, $\mu = 0$ (plaque plane rectangulaire); voir ref. N° 33.

$$\int_0^1 dy^* \int_{y^*}^1 \text{Arc sin } \sqrt{\frac{y^*}{t}} j_0(t) dt = \int_0^1 j_0(t) dt \int_0^t \text{Arc sin } \sqrt{\frac{y^*}{t}} dy^* = -\mu \frac{\pi}{4},$$

par suite :

$$(IV.53) \quad C_x = \frac{4}{\beta} \bar{j}_0^2 + i C_z - \frac{4 \mu i}{\beta^2 \lambda} = \frac{4 i^2}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2 \beta \lambda}\right) + \frac{4}{\beta} \bar{j}_0^2.$$

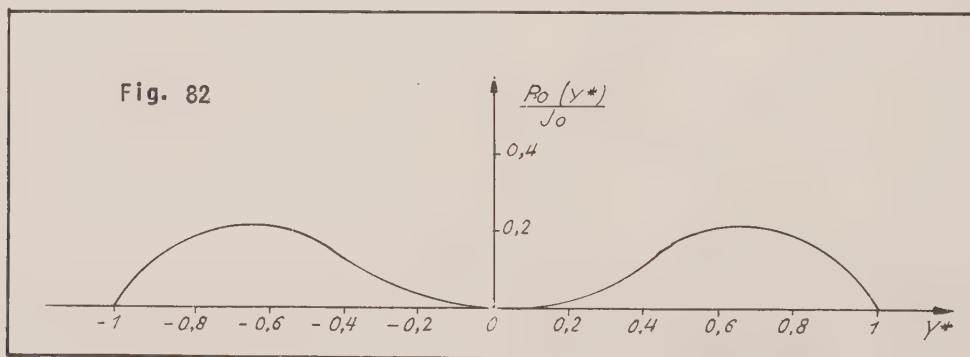
Nous allons faire une application au cas où le profil est défini par :

$$\begin{aligned} j_0(x) &= j_0, & \text{si } 0 < x^* < \frac{1}{2}; \\ j_0(x) &= -j_0, & \text{si } \frac{1}{2} < x^* < 1; \\ f(x) &= \begin{cases} j_0 x, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ j_0 (1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \\ \mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} j_0 x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 j_0 (1-x) dx = \frac{j_0}{4}; \end{aligned}$$

pour déterminer les efforts locaux, il faut calculer les fonctions $p_0(y^*)$ et $T(y^*)$; or :

$$(IV.54) \quad p_0(y^*) = \begin{cases} j_0 k(y^*, \frac{1}{2}) - \frac{j_0}{2} k(y^*, 0), & \text{si } 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2}, \\ j_0 - \frac{j_0}{2} k(y^*, 0), & \text{si } \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1. \end{cases}$$

La variation de $p_0(y^*)$, pour une aile d'allongement réduit égal à 2, est donnée par la figure 82.



D'autre part $T(y^*)$ s'exprime simplement, en fonction de $k(y^*, \xi)$. En effet :

$$\begin{aligned} \int_{y^*}^1 j_0(t-y^*) j_0(t) dt &= \begin{cases} (1-3y^*) j_0^2, & \text{si } 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2}, \\ (y^*-1) j_0^2, & \text{si } \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1; \end{cases} \\ \int_{y^*}^1 \text{Arc sin } \sqrt{\frac{y^*}{t}} j_0(t) dt &= \begin{cases} \frac{\pi j_0}{4} \left[2 k(y^*, \frac{1}{2}) - k(y^*, 0) - 2 y^* \right], & \text{si } 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi j_0}{4} \left[2 y^* - k(y^*, 0) \right], & \text{si } \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ces formules s'établissent immédiatement, en remarquant que :

$$\int_{y^*}^{1-\xi} \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^*}{u}} du = \frac{\pi}{4} \left[k(y^*, \xi) - 2 y^* \right] .$$

Enfin :

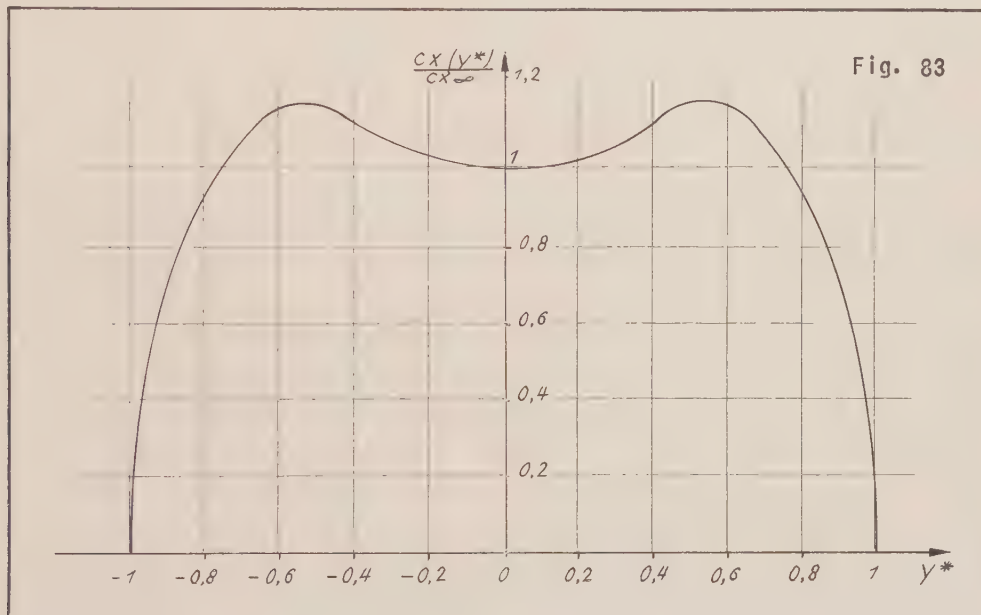
$$\int_0^{1-y^*} dj_0(\xi) \int_{y^*+\xi}^1 \text{Arc sin} \sqrt{\frac{y^*}{t-\xi}} j_0(t) dt = \begin{cases} j_0^2 \frac{\pi}{4} \left[4 k(y^*, \frac{1}{2}) - 6 y^* - k(y^*, 0) \right], & \text{si } 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2}, \\ j_0^2 \frac{\pi}{4} \left[2 y^* - k(y^*, 0) \right] & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1, \end{cases}$$

d'où :

$$T(y^*) = \begin{cases} \frac{i}{2} j_0 \left[2 k(y^*, \frac{1}{2}) - k(y^*, 0) \right] + \frac{1}{2} j_0^2 \left[2 + k(y^*, 0) - 4 k(y^*, \frac{1}{2}) \right], & \text{si } 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{i}{2} j_0 \left[2 - k(y^*, 0) \right] + \frac{1}{2} j_0^2 \left[k(y^*, 0) - 2 \right] & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1. \end{cases}$$

(IV. 55)

On trouvera *figure 83* la répartition des traînée en envergure pour une aile de ce type d'allongement réduit égal à 2.



On remarquera que :

$$\int_0^1 p_0(y^*) dy^* = \frac{\mu}{2} = \frac{j_0}{8},$$

et :

$$\int_0^1 T(y^*) dy^* = \frac{\mu i}{2} = \frac{i}{8} j_0;$$

ceci résulte de l'égalité démontrée précédemment :

$$\int_0^{1-\xi} k(y^*, \xi) dy^* = \frac{3}{2} (1-\xi)^2 .$$

4.1.2.2.3. - Effet de volets et d'ailerons.

Nous commencerons par le cas d'une plaque plane, les formules pouvant se généraliser facilement dans le cas où le profil de l'aile est courbe. Les ailerons occupent par exemple sur la plaque la disposition indiquée par la *figure 84*, γ_1 désigne le braquage du premier aileron A'CDD', γ_2 celui du second B'EFF'.

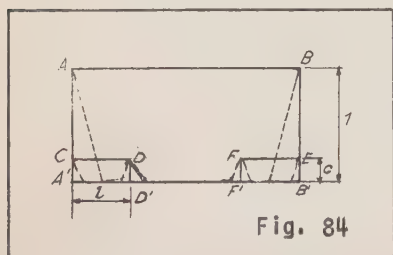


Fig. 84

Pour étudier l'écoulement, il faut utiliser des mouvements coniques $\vec{T}(M, \alpha)$ que l'on peut définir de la façon suivante. Dans la région $x_3 > 0$, l'écoulement $\vec{T}(M, \alpha)$ est identique à l'écoulement $\vec{C}_s(M, -\alpha)$,

et dans la région $x_3 < 0$ il est identique à l'écoulement $\vec{C}_s(M, \alpha)$. On a une interprétation immédiate des écoulements $\vec{T}$, qui rend compte de l'utilisation possible dans les effets de volets et d'ailerons ⁽¹⁾ : l'écoulement $\vec{T}(M, \alpha)$ s'établit lorsque le plan Ox_1x_2 étant matérialisé, on fait pivoter, d'un angle $-\alpha$, le quadrant Mx_1x_2 autour de Mx_2 (fi-

gure 58). Dès lors, le mouvement étudié peut s'obtenir immédiatement, par une superposition d'écoulements coniques schématisés de la manière suivante :

$$(IV. 53) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \vec{C}_p(A, -i) & \vec{C}_p(B, -i) & E(AB, +i) \\ \vec{C}_p(C, \gamma_1) & \vec{T}(D, \gamma_1) & E(CD, -\gamma_1) \\ \vec{C}_p(E, \gamma_2) & \vec{T}(F, \gamma_2) & E(EF, -\gamma_2). \end{array} \right.$$

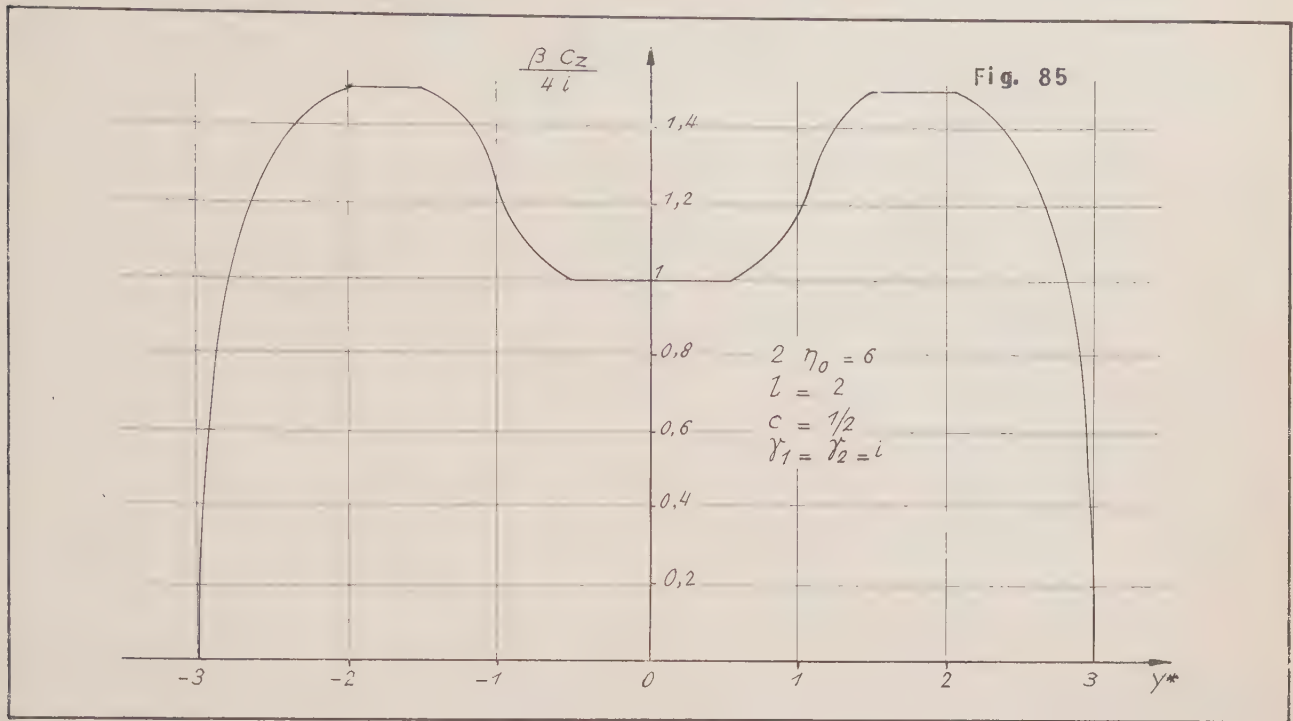
Naturellement, pour qu'un tel schéma soit valable sans complications supplémentaires, il faut que le coefficient de pression soit nul, en dehors de (R). C'est ce qui aura lieu si l'allongement réduit de la plaque et des volets est supérieur ou égal à 1.

Appliquons ces principes au calcul du C_z local d'une plaque, pour laquelle les cônes de Mach des points A, B, C, D, E, F ont la disposition donnée par la *figure 84*. On peut alors placer l'origine au point A et écrire immédiatement le C_z local, en fonction de y^* ($y^* = \beta x_2$); on posera $AA' = 1$, $CA' = c$, $\beta CD = l$); d'après les résultats obtenus aux numéros 4.1.1.1.5. et 4.1.2.2.1. :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } y^* < c, & c_z = \frac{8}{\beta \pi} \left[\gamma_1 \left[c \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{y^*}{c}} + \sqrt{y^* (c - y^*)} \right] + \right. \\ & \left. + i \left[\operatorname{Arc} \sin \sqrt{y^*} + \sqrt{y^* (1 - y^*)} \right] \right], \\ c < y^* < 1, & c_z = \frac{4}{\beta} \left[\gamma_1 c + \frac{2i}{\pi} \left[\operatorname{Arc} \sin \sqrt{y^*} + \sqrt{y^* (1 - y^*)} \right] \right], \\ 1 < y^* < l - c, & c_z = \frac{4}{\beta} (i + \gamma_1 c), \\ l - c < y^* < c, & c_z = \frac{4}{\beta} \left[i + \frac{\gamma_1 c}{2} + \frac{\gamma_1 c}{\pi} \left[\operatorname{Arc} \sin \frac{l - y^*}{c} + (l - y^*) \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{c}{l - y^*} \right] \right], \\ l < y^* < l + c, & c_z = \frac{4}{\beta} \left[i + \frac{\gamma_1 c}{2} - \frac{\gamma_1 c}{\pi} \left[\operatorname{Arc} \sin \frac{y^* - l}{c} + (y^* - l) \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{c}{y^* - l} \right] \right]. \end{array} \right.$$

(1) Nous avons indiqué cette méthode, dans une note aux comptes rendus, en décembre 1947 (ref. 37). L'intérêt des mouvements $\vec{T}$, que nous indiquons ici a été indiqué dans l'article de M. Snow, paru en même temps que notre note (ref. N° 32).

On trouvera figure 85, la répartition du c_z en envergure. D'une façon générale on pourra d'ailleurs écrire le c_z local d'une aile rectangulaire mince quelconque, munie de volets ou d'ailerons.



En effet, si on pose :

$$(IV.58) \quad \begin{cases} f(u, c) = c \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\text{Arc sin } \frac{u}{c} + u \text{ Arg ch } \frac{c}{|u|} \right) \right], & \text{si } -c < u < c, \\ f(u, c) = 0, & \text{si } u + c < 0, \\ f(u, c) = 2c, & \text{si } u - c > 0, \end{cases}$$

on a, avec les notations habituelles :

$$(IV.59) \quad \begin{aligned} c_z(\eta) = & \frac{2i}{\beta} \left[k(\eta_0 + \eta, 0) + k(\eta_0 - \eta, 0) - 2 \right] + \frac{4}{\beta} \left[\eta_0 + \eta + \rho_0(\eta_0 - \eta) \right] + \\ & + \frac{2\gamma_1}{\beta} \left[k(\eta_0 + \eta, 1-c) - f(\eta_0 - l + \eta, c) \right] + \frac{2\gamma_2}{\beta} \left[k(\eta_0 - \eta, 1-c) - f(\eta_0 - l - \eta, c) \right]. \end{aligned}$$

On peut facilement calculer le C_z global. Remarquons pour cela que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\eta_0} k(u, 1-c) du &= \int_0^c k(u, 1-c) du + \int_c^{2\eta_0} k(u, 1-c) du = \\ &= \frac{3}{2} c^2 + 2c(2\eta_0 - c). \end{aligned}$$

La valeur moyenne de f s'obtient très facilement, d'où :

$$(IV.60) \quad C_z = \frac{4i}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2\beta\lambda} \right) + \frac{4\mu}{\beta^2\lambda} + 2 \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\beta^2\lambda} \left(2cl - \frac{1}{2}c^2 \right).$$

On voit également que le calcul des moments ne fait aucune difficulté.

4.1.2.3.- Quelques remarques sur l'étude de l'effet de flèche.

Nous ne pouvons ici développer une théorie de l'aile en flèche. Nous nous contenterons donc de quelques remarques.

4.1.2.3.1.- Etude de l'aile en flèche à "bord d'attaque supersonique". ($\beta \cotg \gamma > 1$), voir figure 66.

Cette étude ne présente aucune difficulté, dans le cas où l'allongement réduit η_0 est supérieur à $\frac{1}{1-\cos \theta}$. Reprenons les notations du numéro 4.1.1.2.1.; soit $j(\xi)$ l'angle définissant le profil infiniment mince de l'aile, supposé constant en envergure [$j(\xi) = j_0(\xi) - i$], l'écoulement s'obtiendra en superposant comme précédemment :

- 1) des écoulements coniques débordant le cône de Mach, centrés sur OO'
- 2) des écoulements portants centrés sur AA' et BB'
- 3) enfin des écoulements autour de l'aile d'envergure infinie en dérive, ayant même profil que le profil de l'aile et dont les bords d'attaque coïncident avec OA et OB .

Pour simplifier l'étude, nous supposerons que les cônes de Mach des points O , A , B , n'interfèrent pas sur l'aile, ce qui permettra d'étudier séparément "l'effet de tête" (écoulements coniques centrés sur OO') et "l'effet de bout" (écoulements coniques centrés sur AA' ou BB'). "L'effet de tête" s'étudie immédiatement, d'après les formules du numéro 4.1.1.2.1.

Le coefficient de pression, sur la face $x_3 = +0$, s'écrit :

$$C_p = \frac{1}{\beta \sin \theta} \left[2 j(x) - 2 Q(x, y^*, \theta) \right],$$

Q étant défini par la formule (IV.21), dans laquelle on remplace $\alpha(\xi)$ par $j(\xi)$.

Le coefficient de portance locale s'écrit :

$$c_z(y^*) = \frac{4i}{\beta \sin \theta} + \frac{8}{\beta \pi \sin \theta} \int_{y^*(1-\cos \theta)}^1 dx \int_0^{x-y^*(1-\cos \theta)} \frac{\sin \theta (x-\xi + y^* \cos \theta)}{\text{Arc cos} \frac{\sin \theta (x-\xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^* \cos \theta)}}} dj(\xi).$$

Quant à la valeur moyenne de $c_z(y^*)$, dans la région $0 < y^* < \frac{1}{1-\cos \theta}$ elle est égale à :

$$\begin{aligned} & \frac{4i}{\beta \sin \theta} + \frac{8(1-\cos \theta)}{\beta \pi \sin \theta} \int_0^1 dx \int_0^x dj(\xi) \int_0^{\frac{x-\xi}{1-\cos \theta}} \frac{\sin \theta (x-\xi + y^* \cos \theta)}{\sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^* \cos \theta)}} dy^* = \\ & \text{(IV.61)} \\ & = \frac{4i}{\beta \sin \theta} + \frac{8I(\theta)(1-\cos \theta)}{\beta \pi \sin \theta} \left(-\frac{i}{2} + \mu \right), \end{aligned}$$

avec :

$$I(\theta) = \int_0^1 \text{Arc cos} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-t^2 \cos^2 \theta}} \frac{dt}{(1-t \cos \theta)^2} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \theta} \left[1 + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos 2\theta + \frac{\pi}{2} \cos^2 \theta \right] \right];$$

de même, la traînée locale s'écrit :

$$c_x(y^*) = \frac{4 \bar{j}^2}{\beta \sin \theta} - \frac{4}{\beta \sin \theta} G(y^*, \theta),$$

à condition de remplacer dans la formule définissant G , (IV.25), $\alpha(\xi)$ par $j(\xi)$.

La valeur moyenne de cette traînée, dans la région $0 < y^* < \frac{1}{1-\cos \theta}$, s'écrit :

$$\frac{4(i^2 + \bar{j}_0^2)}{\beta \sin \theta} - \frac{8(1-\cos \theta)}{\beta \pi \sin \theta} \int_0^1 j(x) dx \int_0^x dj(\xi) \int_{\frac{x-\xi}{1-\cos \theta}}^{\frac{x-\xi}{1-\cos \theta}} \frac{\sin \theta (x-\xi + y^* \cos \theta)}{\text{Arc sin} \sqrt{(x-\xi)(x-\xi + 2y^* \cos \theta)}} dy^* =$$

$$= \frac{4(i^2 + \bar{j}_0^2)}{\beta \sin \theta} - \frac{8(1-\cos \theta)}{\beta \pi \sin \theta} I(\theta) \int_0^1 j(x) dx \int_0^1 (x-\xi) dj(\xi) =$$

$$= \frac{4(i^2 + \bar{j}_0^2)}{\beta \sin \theta} - \frac{4(1-\cos \theta)}{\beta \pi \sin \theta} I(\theta) i^2. \quad (\text{IV.63})$$

On peut étudier de même, "l'effet de bout", en composant les mouvements étudiés au numéro 3.2.3.2. En prenant les coordonnées réduites, rapportées au point A, on a immédiatement :

$$C_p = \frac{2}{\beta \sin \theta} \left[j(x) - R[x, y^* (1+\cos \theta)] \right],$$

R étant la fonction définie par (IV.54). Et par suite :

$$c_z(y^*) = \frac{2k(y^* (1+\cos \theta), 0)}{\beta \sin \theta} i + \frac{4}{\beta \sin \theta} \phi_0[y^* (1+\cos \theta)];$$

la valeur moyenne du c_z , dans l'intervalle $0 < y^* < \frac{1}{1+\cos \theta}$ s'écrit :

$$C_z = \frac{3i}{\beta \sin \theta} + \frac{2\mu}{\beta \sin \theta}.$$

On obtient également, sans difficulté aucune, la valeur de la traînée locale:

$$c_x(y^*) = i c_z(y^*) + \frac{4}{\beta \sin \theta} \bar{j}_0^2 - \frac{4}{\beta \sin \theta} T[y^* (1+\cos \theta)],$$

et sa valeur moyenne dans l'intervalle $0 < y^* < \frac{1}{1+\cos \theta}$:

$$\frac{3i^2}{\beta \sin \theta} + \frac{4}{\beta \sin \theta} \bar{j}_0^2.$$

On peut rassembler ces résultats de la façon suivante : considérons une aile d'allongement égal à $2\eta_0$ (fig. 86), le C_z global de cette aile s'écrit :

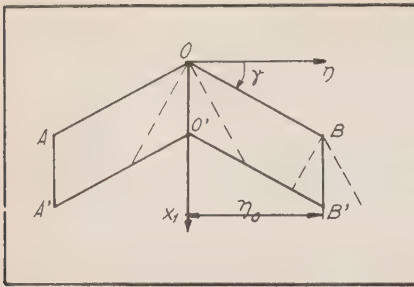


FIG. 86

$$C_z = \frac{4i}{\beta \sin \theta \eta_0} \left[1 - \frac{I(\theta)}{\pi} (1 - \cos \theta) \right] \frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{3i}{\eta_0 \beta \sin \theta} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{4i}{\eta_0 \beta \sin \theta} \frac{\eta_0 \sin^2 \theta - 2}{\sin^2 \theta} + \frac{2\mu}{\beta \sin \theta \eta_0} \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{4I(\theta)}{\pi} \right],$$

ou :

$$(IV.64) \quad C_z = \frac{4i}{\beta \sin \theta} \left[1 - \frac{1}{4\eta_0} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{4I(\theta)}{\pi} \right) \right] + \frac{2\mu}{\beta \eta_0 \sin \theta} \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{4I(\theta)}{\pi} \right].$$

De même, pour la traînée globale :

$$C_x = \frac{4(i^2 + \bar{j}_0^2)}{\eta_0 \beta \sin \theta} \frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{4I(\theta)}{\beta \pi \sin \theta \eta_0} i^2 + \left[\frac{3i^2}{\beta \sin \theta} + \frac{4}{\beta \sin \theta} \bar{j}_0^2 \right] \frac{1}{(1 + \cos \theta) \eta_0} + \frac{4(i^2 + \bar{j}_0^2)}{\beta \sin \theta \eta_0} \frac{\eta_0 \sin^2 \theta - 2}{\sin^2 \theta},$$

ou :

$$(IV.65) \quad C_x = \frac{4i^2}{\beta \sin \theta} \left[1 - \frac{1}{4\eta_0} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{4I(\theta)}{\pi} \right) \right] + \frac{4\bar{j}_0^2}{\beta \sin \theta}.$$

Ces formules restent applicables tant que $\eta_0 > \frac{1}{1 - \cos \theta}$.

4.1.2.3.2.- L'étude de l'aile en flèche à bord d'attaque supersonique quand $\eta_0 < \frac{1}{1 - \cos \theta}$, ou à bord d'attaque subsonique, présente des difficultés plus sérieuses. Une telle étude complète nous mènerait trop loin. Nous nous contenterons de traiter un exemple simple, montrant comment procéder pour surmonter les difficultés.

On y arrive en introduisant des mouvements coniques, que nous noterons :

$$S(M, t_0, u_0),$$

définis dans le plan Z par les conditions aux limites suivantes (fig. 87) :

- 1) Sur (C_0) , $u = v = w = 0$
 - 2) Sur OA , $w = 0$
 - 3) Sur le bord supérieur de OC , $u = u_0$,
Sur le bord inférieur de OC , $u = -u_0$;
- u_0 est une constante donnée, le point C est l'image du nombre $Z = -a^2$; on pose, comme à l'ordinaire :

$$t_0 = \frac{2a^2}{1 + a^4}.$$

Les méthodes du chapitre 3, permettent très facilement d'écrire la fonction $U(Z)$, dont la partie réelle donne la composante u d'un tel écoulement; si on pose :

$$Z = s^2,$$

on a :

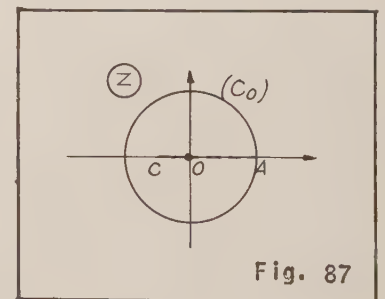


Fig. 87

$$C_p = - \frac{2i}{\beta \sin \theta} \left[\frac{2}{\pi} \left[\text{Arc sin } \frac{\sin \theta (x - y^* \cos \theta)}{\sqrt{x(x - 2y^* \cos \theta)}} + \text{Arc sin } \sqrt{\frac{(\eta_0 + y^*)(1 + \cos \theta)}{x}} \right] \right. \\ \left. - 1 - \frac{4}{\pi^2} \int_{\eta_0(1 - \cos \theta)}^{\pi - (\eta_0 + y^*)(1 + \cos \theta)} \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\eta_0 [x - \xi - (\eta_0 + y^*)(1 + \cos \theta)]}{\eta_0 x + y^* \xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\text{Arc sin } \sqrt{\frac{\sin \theta (\xi + \eta_0 \cos \theta)}{\xi(\xi + 2\eta_0 \cos \theta)}} \right] d\xi \right] \quad (\text{IV.68})$$

On vérifie bien, en particulier, que le C_p s'annule, pour $y^* = -\eta_0$, c'est-à-dire sur le bord AA'.

Cette formule, on le voit, est assez compliquée. Nous nous contenterons d'examiner le cas où $\theta = 0$. La formule présente alors une forme indéterminée qu'il est d'ailleurs facile de lever, en développant, jusqu'au premier ordre inclus (en θ), les termes du crochet. Il convient, dans l'intégrale, d'effectuer une intégration par parties, avant de faire ce développement.

Le résultat est alors notablement plus simple; on trouve :

$$(\text{IV.69}) \quad C_p = - \frac{4i}{\pi \beta} \left[\frac{(x - y^*)}{\sqrt{x(x - 2y^*)}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi - 2(\eta_0 + y^*)} \frac{\xi + \eta_0}{\sqrt{\xi(\xi + 2\eta_0)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\text{Arc sin } \sqrt{\frac{\eta_0 [x - \xi - 2(\eta_0 + y^*)]}{\eta_0 x + y^* \xi}} \right] d\xi \right]$$

L'intégrale du second membre représente "l'effet de bout" de l'aile AA', le premier terme représentant tout simplement le coefficient de pression, dans l'écoulement conique de sommet O ⁽¹⁾.

Comme application, nous allons calculer le C_z global de cette aile :

$$C_z = \frac{8i}{\beta \pi \eta_0} \left[\int_0^{\eta_0} dy^* \int_0^1 \frac{(x + y^*)}{\sqrt{x(x + 2y^*)}} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{x-z} F(z, x, \xi) d\xi \right],$$

quand on pose :

$$2(\eta_0 + y^*) = z,$$

$F(z, x, \xi)$ désignant la qualité sous le signe $\int$, dans la formule (IV.69). L'intégrale double se calcule immédiatement (voir la fin du N° 4.1.1.2.1.) :

$$\int_0^{\eta_0} dy^* \int_0^1 \frac{x + y^*}{\sqrt{x(x + 2y^*)}} dx = \int_0^1 dx \int_0^{\eta_0} \frac{x + y^*}{\sqrt{x(x + 2y^*)}} dy^* = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{\frac{x + 2\eta_0}{x}} \left[2x + \eta_0 \right] dx - \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{3} \left[(1 + 2\eta_0)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

(1) Si on avait voulu étudier directement le cas où $\theta = 0$, en appliquant la méthode précédente, on aurait été conduit à écrire :

$$C_p = - \frac{4i}{\beta \pi} \left[\frac{x - y^*}{\sqrt{x(x - 2y^*)}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi - 2(\eta_0 + y^*)} \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\eta_0 [x - \xi - 2(\eta_0 + y^*)]}{\eta_0 x + y^* \xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{\frac{\xi + \eta_0}{\xi(\xi + 2\eta_0)}} \right] d\xi \right].$$

Mais l'intégrale du second membre n'a pas de sens, car l'élément différentiel est en $\xi^{-3/2}$. Pour lever cette difficulté, il faut utiliser la notion "partie finie" d'une intégrale, introduite en analyse par M. Hadamard (voir ref.7) On a en effet : .../

Quant à l'intégrale triple, on peut l'écrire en changeant l'ordre des intégrations :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(\xi + \eta_0) \sqrt{\eta_0} d\xi}{\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)}} \int_{\xi}^1 dx \int_0^{x-\xi} \frac{z - x - 2\eta_0}{z \xi + 2\eta_0 (x - \xi)} \sqrt{\frac{z}{x - \xi - z}} dz.$$

Pour calculer la dernière intégrale, on pose :

$$\frac{z}{x - \xi - z} = t^2,$$

elle s'écrit alors :

$$\int_0^x 2 \frac{t^2 (x - \xi) - (x + 2\eta_0) (1 + t^2)}{2\eta_0 (1 + t^2) + t^2 \xi} \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^2},$$

et se calcule rapidement par résidus. Elle vaut :

$$\frac{\pi x}{\xi^2} \sqrt{2\eta_0 (\xi + 2\eta_0)} - \frac{\pi x}{2\xi^2} (\xi + 4\eta_0) - \frac{\pi}{2}.$$

Pour calculer l'intégrale triple, il suffit donc d'utiliser les résultats suivants :

$$\int_0^1 \frac{(\xi + \eta_0) (1 - \xi)}{\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)}} d\xi = 2 \left(\frac{2}{3} + \eta_0 \right) - \frac{2\eta_0 (1 + 2\eta_0)}{\sqrt{2\eta_0}} \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}},$$

$$\int \frac{(\xi + \eta_0) (\xi + 4\eta_0) (1 - \xi^2)}{\xi^{5/2} (\xi + 2\eta_0)} d\xi = - \left[\frac{4\eta_0}{3\xi^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{\xi}} + 6\eta_0 \sqrt{\xi} + \frac{2}{3} \xi^{3/2} + \frac{1 - 4\eta_0^2}{\sqrt{2\eta_0}} \text{Arc tg } \sqrt{\frac{\xi}{2\eta_0}} \right],$$

$$\int \frac{(\xi + \eta_0) (1 - \xi^2)}{\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)} \xi^2} d\xi = - \left[\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)} + \sqrt{\frac{\xi + 2\eta_0}{\xi}} \frac{2\xi + \eta_0}{3\eta_0 \xi} \right].$$

L'intégrale triple a donc pour valeur :

$$\frac{\pi}{8} \sqrt{2\eta_0} \left(1 + \frac{10\eta_0}{3} \right) + \frac{(1 + 2\eta_0)^2}{8} \pi \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} - \pi \frac{(1 + 2\eta_0)^{3/2}}{3},$$

ce qui conduit à la valeur suivante pour le C_z cherché :

$$(IV.70) \quad C_z = \frac{i}{\beta \pi \eta_0} \left[\frac{(3 + 10\eta_0)}{3} \sqrt{2\eta_0} + (1 + 2\eta_0)^2 \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} - \frac{8}{3} \right].$$

(1) suite ...

$$\int_0^{x-2(\eta_0+y^x)} \frac{\text{Arc sin } \sqrt{\frac{\eta_0 [x-\xi-2(\eta_0+y^x)]}{\eta_0 x + y^x \xi}}}{\eta_0 x + y^x \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi + \eta_0}{\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)}} d\xi =$$

$$= - \int_0^{x-2(\eta_0+y^x)} \frac{\xi + \eta_0}{\sqrt{\xi (\xi + 2\eta_0)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\text{Arc sin } \sqrt{\frac{\eta_0 [x-\xi-2(\eta_0+y^x)]}{\eta_0 x + y^x \xi}} \right] d\xi \quad \dots /$$

On trouvera, figure 89, la variation du C_z en fonction de η_0 .

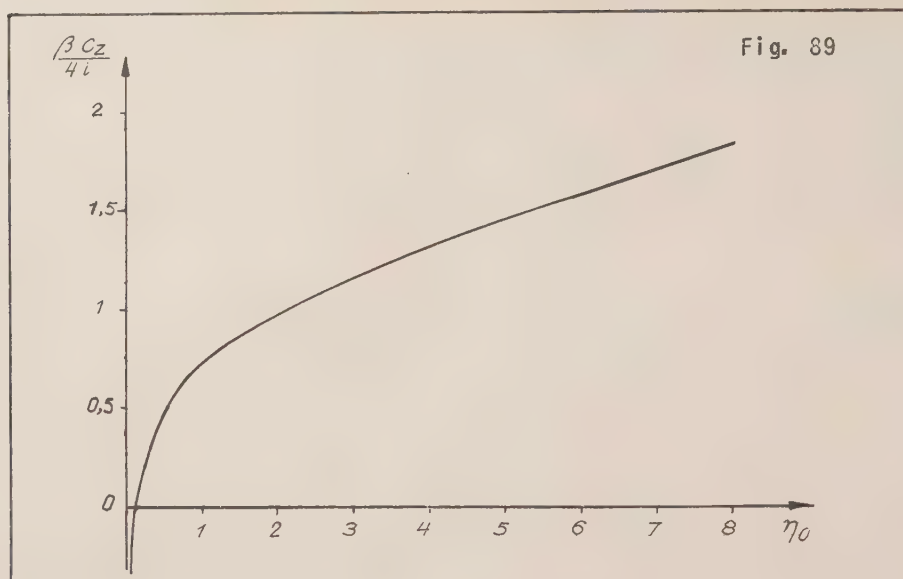


Fig. 89

Comme application, nous avons tracé figure 90 page 166) la variation de $\frac{1}{2} \frac{dc_z}{dz}$ en fonction du nombre de Mach, pour des plaques ayant la forme en plan définie par la figure 86. L'angle de flèche est de 45° , les allongements géométriques sont respectivement égaux à 1, 2 et 8. Les points situés sur l'abscisse $M = \sqrt{2}$ sont obtenus exactement [formule (IV.70)]. Les parties tracées en traits pleins sont données par la formule (IV.64). Les parties en pointillés sont obtenues par interpolation. Pour les avoir, en toute rigueur, il faudrait calculer le C_z , à partir de la formule (IV.68).

4.1.2.4. - Les segments uniformément portants.

On sait le rôle joué par le "tourbillon en fer à cheval" ou "segment uniformément portant", dans la théorie des ailes portantes en subsonique : cette notion est à la base de la théorie linéaire de Prandtl. Nous allons montrer combien il est facile d'obtenir l'écoulement correspondant supersonique et indiquer quelques applications possibles.

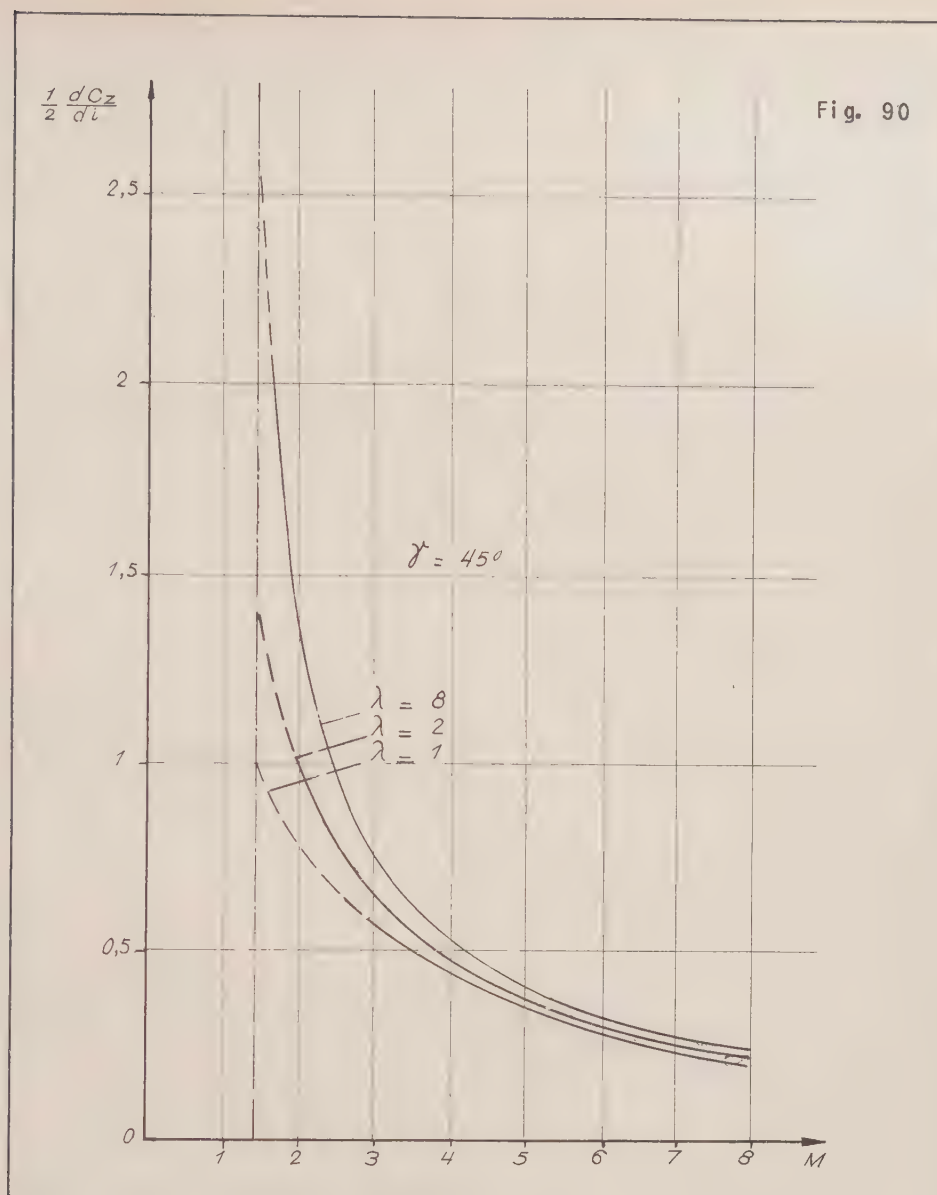
D'après le numéro 3.2.3.1. l'écoulement conique pour lequel :

$$(IV.71) \quad U(Z) = u_0 + i \frac{u_0}{\pi} \log \frac{Z}{1+Z^2},$$

représente un écoulement pour lequel u vaut 0, dans le plan $x_3 = 0$, sauf sur le quadrant Ox_1, Ox_2 où u prend les valeurs $\pm u_0$. Appliquons alors les résultats du numéro 1.3. L'écoulement homogène d'ordre 0, défini par le potentiel complexe :

$$(IV.72) \quad \Phi(Z) = -i \frac{p_0}{2\pi} \log \frac{Z}{1+Z^2},$$

... Ceci justifie, une fois de plus, l'intérêt de la notion de "partie finie" d'une intégrale, qui permet d'effectuer très facilement des passages à la limite qui peuvent être délicats.



peut être considéré comme écoulement dérivé dans la direction Ox_1 de l'écoulement conique défini par (IV.71), et par suite définit l'écoulement correspondant à la demi-droite Ox_2 uniformément portante, la portance uniforme étant égale à p_o . Le champ des vitesses, à l'intérieur du cône de Mach Γ de O , s'obtient en appliquant les formules (I.29) :

$$u = \frac{p_o}{2 \pi x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[i \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} \right],$$

$$v = \frac{p_o}{2 \pi x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[-i \frac{\beta}{2} \frac{Z^2 - 1}{Z} \right],$$

$$w = \frac{p_o}{2 \pi x_1} \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \mathcal{R} \left[-\frac{\beta}{2} \frac{(Z^2 - 1)^2}{Z (Z^2 + 1)} \right];$$

à l'extérieur de (Γ) les vitesses sont nulles.

Si on calcule le champ de vitesses, dans un plan $x_1 = x_1^0$, x_1^0 étant très grand, on a alors :

$$\rho \sim \frac{\beta r}{2 x_1},$$

par suite :

$$u \sim 0, \quad v = -\frac{\rho_0}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad w = \frac{\rho_0}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r},$$

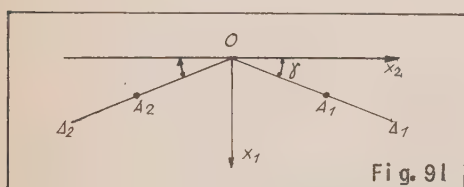
c'est-à-dire le champ tourbillonnaire classique.

Pour obtenir l'écoulement correspondant au segment uniformément portant, on envisage la superposition de deux écoulements homogènes de ce type. Soit, par exemple, A_1 et A_2 deux points de Ox_2 , Z_1 et Z_2 les valeurs de la variable Z quand on prend respectivement comme origine, A_1 et A_2 . L'écoulement cherché est déterminé par le potentiel complexe (1) :

$$\Phi(Z) = \frac{i \rho_0}{2\pi} \left[\log \frac{Z_2}{1 + Z_2^2} - \log \frac{Z_1}{1 + Z_1^2} \right].$$

Ceci pourrait être à la base d'une théorie des ailes droites (sans flèche), analogue à la théorie de Prandtl pour les mouvements subsoniques. Mais on n'a pas réussi à relier la portance locale avec la pente générale du profil.

Par contre, on peut appliquer ces formules pour étudier, au moins de façon approchée, le champ des vitesses derrière une aile droite, lorsqu'on connaît la répartition des circulations. Il y a là, nous semble-t-il, un procédé qui doit permettre une première étude de l'interaction d'une aile sur les gouvernes (2).



Il est très facile également, suivant le même principe, de définir les écoulements correspondant à deux demi-droites uniformément portantes OA_1 , OA_2 (voir figure 91). Si $\beta \cotg \gamma =$

$\frac{1}{\cos \theta}$, c'est un écoulement homogène d'ordre zéro, défini par le potentiel complexe :

$$(IV.73) \quad \Phi(Z) = -\frac{i \rho_0}{2\pi} \log \frac{1 + Z^2 - 2Z \cos \theta}{1 + Z^2 + 2Z \cos \theta}.$$

Cela résulte immédiatement de la formule (III.47). De même, la demi-droite OA_1 , uniformément chargée donne lieu à l'écoulement défini par :

$$\Phi(Z) = -\frac{i \rho_0}{2\pi} \log \frac{Z}{1 + Z^2 - 2Z \cos \theta}.$$

Dans chacun de ces cas, on écrit immédiatement le champ des vitesses en appliquant les formules (I.29).

(1) Les formules obtenues ici ont été obtenues par une autre méthode par Schlichting (ref.34).

(2) L'étude faite pour l'aile rectangulaire au N° 4.1.2.2. permet en effet de calculer les efforts sur l'aile, mais ne permet, dans aucun cas, l'étude du champ en arrière de l'aile.

Ceci permet de définir l'écoulement autour d'une ligne portante telle que A_1OA_2 uniformément chargée. On peut, comme dans le cas d'une aile droite, utiliser ces écoulements pour étudier le champ des vitesses derrière une aile en flèche.

4.2.- Etude des fuselages.-

4.2.1.- GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS DE REVOLUTION AUTOUR DE CORPS FUSELES.-

Nous allons obtenir, par composition de mouvements coniques, une nouvelle méthode pour l'étude des écoulements de révolution. Les résultats relatifs à ces écoulements ont fait l'objet de nombreux travaux (ref. 35, 36, 5) mais les méthodes que nous allons exposer nous semblent permettre certaines généralisations. La donnée, dans ce problème, est la valeur de la vitesse radiale v_r le long d'une méridienne. Cette vitesse est égale à $\frac{dr}{dx_1}(x_1)$, $r(x_1)$ étant la fonction définissant la méridienne dans un plan r, x_1 . Mais nous verrons que $v_r(x_1, r)$ est une fonction qui, pour x_1 fixé, est d'ordre $\frac{1}{r}$ pour r petit. La condition aux limites peut aussi s'écrire :

$$r v_r = r \frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{dx_1},$$

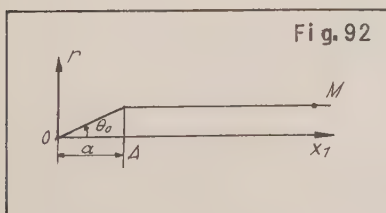
$S(x_1) = \pi r^2$ désignant l'aire de la section du fuselage d'abscisse x_1 . Si l'on fait tendre r vers zéro, $r v_r$ gardera une valeur finie. D'une façon précise nous poserons que le mouvement étudié devra vérifier la condition aux limites suivante :

$$(IV.74) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r v_r = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{dx_1}.$$

4.2.2.- ETUDE D'UN CAS PARTICULIER.-

Considérons l'écoulement autour d'un cône de révolution; les formules $V(Z)$, $W(Z)$, $U(Z)$ sont des fonctions de Z , n'admettant, à l'intérieur de $|Z| = 1$, que le point $Z = 0$, comme singularité. Elles peuvent donc être prolongées analytiquement à l'intérieur du cercle (C), image du cône obstacle dans le plan Z , à condition d'exclure de ce cercle l'origine 0.

Ceci dit, nous allons chercher l'écoulement autour d'un corps de révolution dont la méridienne a la forme simple donnée par la figure 92. θ_0 est naturellement un angle infiniment petit. Une première idée pour obtenir un tel mouvement, consiste à retrancher à l'écoulement autour d'un cône de révolution de sommet O d'angle θ_0 , un écoulement semblable de sommet A. Posons :



$$\frac{x_1}{\beta r} = \frac{1+\rho^2}{2\rho} \quad , \quad \frac{x_1-a}{\beta r} = \frac{1+\rho_1^2}{2\rho_1} ;$$

la vitesse radiale de l'écoulement résultant est :

$$v_r = \frac{\beta \theta_0^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \rho - \left(\frac{1}{\rho_1} - \rho_1 \right) \right] .$$

Supposons que ρ et ρ_1 sont infiniment petits, ce qui a lieu pour des points M qui sont assez éloignés de A :

$$v_r \sim \frac{\beta \theta_0^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right] \sim \frac{\theta_0^2}{r} [x_1 - (x_1-a)] = \frac{a \theta_0^2}{r} .$$

Pour obtenir l'écoulement désiré, il faudra donc (conformément d'ailleurs au théorème du N° 1.1.3) ajouter un écoulement homogène d'ordre zéro de sommet A, défini par le potentiel complexe :

$$\Phi(Z_1) = -a \theta_0^2 \log Z_1 ,$$

Z_1 désignant la variable complexe Z, pour un écoulement de sommet A (en particulier $|Z_1| = \rho_1$).

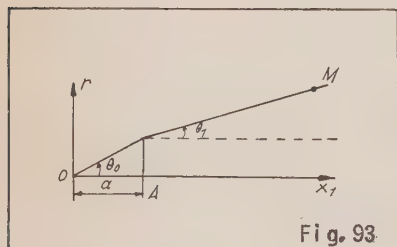
L'écoulement résultant a pour vitesse radiale pour $x_1 > a$ (voir formule I.29):

$$v_r = \frac{\beta \theta_0^2}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) - \left(\frac{1}{\rho_1} - \rho_1 \right) \right] - \frac{a \theta_0^2}{x_1-a} \frac{1+\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \left(\rho_1 + \frac{1}{\rho_1} \right) ,$$

ou:

$$v_r = \frac{\beta \theta_0^2}{2} \left[2\rho_1 - 2\rho - a \frac{(1+\rho_1^2)^2}{1-\rho_1^2} \frac{\beta r}{(x_1-a)^2} \right] .$$

La vitesse radiale obtenue n'est donc pas identiquement nulle, le long du cône obstacle, mais elle est très petite dès que x_1 n'est pas trop voisin de a , car ρ , ρ_1 et r sont des infiniments petits. D'ailleurs, pour toute valeur $x_1 > a$, l'égalité (IV.74) se trouve satisfaite. En première approximation, nous considérerons que l'écoulement obtenu répond aux conditions posées quoique, naturellement, la valeur de v_r ne soit pas négligeable pour x_1 voisin de a .



Supposons maintenant que nous voulions étudier l'écoulement autour d'un corps de révolution, ayant une méridienne schématisée par la figure 93. On est amené à envisager l'écoulement comme résultant de l'écoulement précédemment défini et d'un écoulement conique, de révolution, de sommet A, relatif à l'angle θ_1 . En un point M situé sur la méridienne (l'abscisse de M étant nettement supérieur à a) on a comme vitesse radiale :

$$v_r \sim \theta_0^2 \left(\frac{x_1}{r} - \frac{x_1-a}{r} \right) - \frac{\theta_0^2 a}{r} + \frac{\theta_1^2 (x_1-a)}{r} ,$$

mais :

$$r = (x_1-a) \theta_1 + a \theta_0 = r(a) + (x_1-a) \theta_1 ,$$

en posant :

$$r(a) = a \theta_0 ,$$

$r(a)$ désigne le rayon de la section d'abscisse $x_1 = a$.

D'où :

$$v_r \sim \frac{\theta_1 (r - a \theta_0)}{r} \sim \theta_1 - \frac{r(a) \theta_1}{r}.$$

Comme on doit avoir $v_r = \theta_1$, on voit qu'il faut, en outre, ajouter l'écoulement homogène de sommet A de potentiel complexe :

$$\Phi(Z) = r(a) \theta_1 \log Z.$$

Finalement, le cas étudié s'obtient :

- 1) en ajoutant un écoulement conique, de sommet O relatif à l'angle θ_0 ,
- 2) en ajoutant un écoulement conique, de sommet A relatif à l'angle θ_1 ,
- 3) en retranchant un écoulement conique, de sommet A relatif à l'angle θ_0 ,
- 4) en ajoutant un écoulement homogène, d'ordre zéro, de potentiel complexe :

$$r(a) \Delta \theta(a) \log Z,$$

$r(a)$ étant la valeur du rayon pour $x_1 = a$,

$\Delta \theta(a)$ la discontinuité de l'angle θ pour $x_1 = a$.

4.2.3.- ETUDE APPROCHÉE D'UN FUSELAGE DE REVOLUTION.-

L'application de ce qui vient d'être dit permet d'obtenir d'une façon approchée l'écoulement autour d'un corps fuselé dont la méridienne est polygonale et, par passage à la limite, l'écoulement autour d'un corps de révolution dont la méridienne possède une tangente continue.

Soit d'abord $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, les abscisses des sommets de la ligne polygonale constituant la méridienne, l'écoulement cherché proviendra de la superposition :

- 1) d'une suite d'écoulements coniques donnant lieu à une vitesse axiale de la forme (formule II.23) :

$$\theta_n^2 \log \frac{\rho_n}{\rho_n^2 + 1},$$

où :

$$\frac{1 + \rho_n^2}{2 \rho_n} = \frac{x_1 - a_n}{\beta r}, \quad \theta_n \text{ étant la valeur de } \theta, \text{ pour } a_n < x_1 < a_{n+1};$$

- 2) d'une suite d'écoulements homogènes donnant lieu à une vitesse axiale, de la forme (formule I.29) :

$$-\frac{r_n \Delta \theta_n}{x_1 - a_n} \frac{1 + \rho_n^2}{1 - \rho_n^2},$$

où $r_n = r(a_n)$, $\Delta \theta_n = \Delta(\theta_n) = \theta_n - \theta_{n-1}$,

mais ρ_n sera très petit, sauf aux environs immédiats de a_n , et par suite, on peut penser que la vitesse axiale réduite s'écrira :

$$u(x_1, r) = \sum \theta_n^2 \log \frac{x_1 - a_{n+1}}{x_1 - a_n} - \sum \frac{r_n \Delta \theta_n}{x_1 - a_n},$$

les sommes $\sum$ s'étendant à tous les points A_n dont l'abscisse a_n est inférieure à

$x_1 - \beta r$. Le cas d'une méridienne à tangente continue s'obtient en faisant le passage à la limite dans l'expression précédente ce qui conduit à :

$$u = - \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{\theta^2(\xi) d\xi}{x_1 - \xi} - \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{r(\xi) \theta'(\xi)}{x_1 - \xi} d\xi ;$$

mais :

$$\theta(\xi) = r'(\xi), \quad r'^2(\xi) + r r''(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{d\xi^2} S(\xi),$$

si $S(\xi) = \pi r^2(\xi)$.

On obtient :

$$(IV.75) \quad u = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{\frac{d^2 S}{d\xi^2}}{x_1 - \xi} d\xi.$$

Cette expression est exactement celle donnée par Laitone (ref.5); elle est d'ailleurs équivalente à celles proposées par les autres auteurs déjà signalés.

Mais le raisonnement qui vient d'être fait est un peu sommaire, par suite des difficultés qui se présentent au voisinage des points $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dans le numéro suivant, nous allons justifier ce qui vient d'être exposé, et en particulier la formule importante (IV.75).

4.2.4.- JUSTIFICATION DU PROCÉDE.-

Il s'agit de calculer les vitesses radiale et axiale grâce aux formules rigoureuses, et de ne tenir compte des simplifications possibles que dans le résultat final. La vitesse radiale comprend deux termes, le premier résulte de la composition des mouvements homogènes d'ordre zéro; l'élément différentiel de l'intégrale correspondante est :

$$\frac{\beta}{2} \frac{1}{x_1 - \xi} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} r(\xi) \Delta \theta(\xi) = \frac{1}{r} \frac{1 + \rho^2(\xi)}{1 - \rho^2(\xi)} r(\xi) \Delta \theta(\xi),$$

ou :

$$\frac{1}{r} \left[r(\xi) \theta'(\xi) d\xi + \beta r^2(\xi) \theta'(\xi) d\rho \right],$$

si on suppose $\theta(\xi)$ dérivable car :

$$\frac{2 \rho^2 d\xi}{1 - \rho^2} = \beta r d\rho ;$$

d'où la contribution due à ces mouvements dans la vitesse radiale :

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_1 - \beta r} r(\xi) \theta'(\xi) d\xi + \int_{\rho_0}^1 r(\xi) \theta'(\xi) d\rho$$

ρ_0 étant la valeur de $\rho(\xi)$, pour $\xi = 0$.

De même la composition des mouvements coniques donne lieu à une intégrale, dont l'élément différentiel s'écrit :

$$\sum \frac{\beta}{2} \theta^2(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\rho(\xi)} - \rho(\xi) \right] d\xi = \sum \frac{\beta}{2} \theta^2(\xi) \frac{d}{d\xi} \frac{2x_1 - \xi}{\beta r} + \sum \beta \theta^2(\xi) d\rho.$$

D'où l'intégrale cherchée :

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_1 - \beta r} \theta^2(\xi) d\xi + \beta \int_{\rho_0}^1 \theta^2(\xi) d\rho.$$

La vitesse s'écrit donc :

$$v_r = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{d^2 S(\xi)}{d\xi^2} d\xi + \frac{\beta}{2\pi} \int_{\rho_0}^1 \frac{d^2 S(\xi)}{d\xi^2} d\rho;$$

la dernière intégrale est bornée par la borne supérieure de $\frac{d^2 S(\xi)}{d\xi^2}$ et, par

suite, la condition (IV.74) se trouve bien ainsi vérifiée. Le calcul de u se fait par un procédé tout analogue et conduit à la formule :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{1}{x_1 - \xi} \frac{d^2 S}{d\xi^2} d\xi - \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{r(\xi) \theta^2(\xi)}{x_1 - \xi} \frac{2\rho^2(\xi)}{1 - \rho^2(\xi)} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{\frac{d^2 S}{d\xi^2}}{x_1 - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_0}^1 \frac{2\rho(\xi)}{1 + \rho^2(\xi)} \left(\frac{d^2 S}{d\xi^2} \right) d\rho. \end{aligned}$$

Or il est bien évident que cette dernière intégrale est négligeable devant la première. La formule (IV.75) se trouve ainsi établie. Elle fournit l'approximation suivante pour le coefficient de pression :

$$(IV.76) \quad C_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{1}{x_1 - \xi} \frac{d^2 S}{d\xi^2} d\xi.$$

REMARQUE.— Au chapitre 2, nous avons utilisé la formule (I.10), pour écrire le coefficient de pression. Cette formule conduirait à poser ici :

$$C_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1 - \beta r} \frac{\frac{d^2 S}{d\xi^2}}{x_1 - \xi} \frac{d\xi}{r'^2(x)}.$$

On comparera cette formule avec celle donnée réf.36. Cependant l'analyse qui vient d'être faite ne nous garantit pas que le terme r'^2 représente tous les termes du second ordre. Aussi, en accord d'ailleurs avec Laitone, nous contenterons nous de la formule (IV.76).

4.2.5.- GENERALISATIONS.-

La méthode que nous venons d'indiquer n'a pas seulement l'intérêt de donner

une nouvelle démonstration des formules relatives aux écoulements de révolution, mais de fournir une méthode plus générale susceptible de s'appliquer à de nombreux problèmes de fuselages.

Prenons par exemple le cas des fuselages de révolution dont l'axe est faiblement incliné sur le vent. On peut reprendre la méthode précédente, en partant de l'écoulement autour d'un cône de révolution incliné sur le vent, [formules (II.24) et (II.25)]. L'écoulement cherché s'obtient par superposition convenable de ces écoulements coniques et des écoulements homogènes d'ordre zéro que l'on en déduit en dérivant ces écoulements dans la direction de l'axe du fuselage (voir n° 1.3).

Il est permis de penser que cette méthode pourra permettre également l'étude de fuselages qui ne sont pas de révolution, mais dont, par exemple, la section reste homothétique à elle-même. Certaines difficultés apparaissent qui, toutefois, ne semblent pas insurmontables. En abordant l'étude des fuselages par la méthode des écoulements coniques, notre but n'était que de signaler le principe d'une méthode nouvelle. Nous en réservons le développement pour un travail ultérieur.⁽¹⁾

4.3.- Première étude sur les écoulements coniques aplatis sur un dièdre. - Applications aux dérives et gouvernes.-

Nous avons déjà signalé au cours du chapitre qu'il existe d'autres écoulements coniques que les écoulements infiniment peu ouverts ou que les écoulements aplatis sur un plan. Nous allons, dans ce dernier paragraphe, donner quelques exemples d'écoulements aplatis sur un dièdre. Ces écoulements peuvent être utilisés soit pour l'étude de l'effet de dièdre sur une aile portante, soit pour l'étude des dérives et gouvernes. Nous ne pouvons ici songer à développer la théorie complète de ces écoulements. Nous nous contenterons de signaler quelques exemples.

4.3.1.- EFFET DE DIEDRE SUR UNE AILE DEBORDANT TOTALEMENT LE CONE DE MACH.-

Considérons une aile Δ présentant un dièdre, cette aile étant infiniment aplatie sur deux plans se coupant sur Ox_1 . Nous supposons, pour simplifier, que le plan Ox_1x_3 est un plan de symétrie, l'aile débordant totalement le cône de Mach; l'intrados et l'extrados sont donc "indépendants". Ceci signifie que, dans le plan Z , la région intérieure à (C_0) est partagée en deux domaines (fig. 94 page 173). La partie de l'aile intérieure au cône de Mach (Γ) est figurée par deux rayons OD , OD' , faisant avec OX , les angles θ_0 et $\pi - \theta_0$. Les génératrices limites du Δ ont pour images les points E et E' d'argument θ_1 et $\pi - \theta_1$ sur le cercle. On suppose-
ra pour fixer les idées que $0 < \theta_0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Les conditions aux limites permettant la détermination des fonctions inconnues $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$, dans la région $ODEE'D'O$, sont les suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1) sur l'arc EE' | $u = v = w = 0,$ |
| 2) sur l'arc ED et sur le segment OD | $w \cos \theta_0 - v \sin \theta_0 = \alpha,$ |
| 3) sur l'arc $E'D'$ et sur le segment OD' | $w \cos \theta_0 + v \sin \theta_0 = \alpha.$ |

(1) Voir Annexe n° 7 le développement de cette idée.

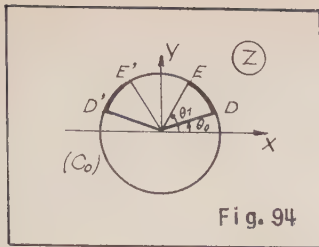


Fig. 94

Nous traiterons ici le cas élémentaire, et par suite, α sera considéré comme constant. La condition :

$$w \cos \theta_0 - v \sin \theta_0 = \alpha$$

entraîne que, sur OD :

$$\Re \left[Z \frac{dW}{dZ} \cos \theta_0 - Z \frac{dV}{dZ} \sin \theta_0 \right] = 0,$$

ou encore :

$$\Re \left[\left(Z + \frac{1}{Z} \right) \sin \theta_0 + i \left(Z - \frac{1}{Z} \right) \cos \theta_0 \right] Z \frac{dU}{dZ} = 0,$$

d'où :

$$\Im \left[Z \frac{dU}{dZ} \right] = 0.$$

La dérivée normale de u est nulle le long de OD.

On aurait un résultat analogue sur le segment OD'.

D'autre part, sur ED :

$$\Im \left[Z \frac{dW}{dZ} \cos \theta_0 - Z \frac{dV}{dZ} \sin \theta_0 \right] = 0,$$

ce qui entraîne encore :

$$\Re \left[Z \frac{dU}{dZ} \right] = 0.$$

Par suite : u garde une valeur constante sur ED et E'D'.

Il est d'ailleurs facile de calculer cette valeur grâce aux formules (III.46); on trouve :

$$u_0 = \frac{\alpha}{\beta \sin (\theta_0 - \theta_1)}.$$

Pour achever le calcul de $U(Z)$, il est alors indiqué d'effectuer la transformation conforme :

$$\tau = i^{1-m} Z^m,$$

où :

$$m = \frac{\pi}{\pi - 2\theta_0};$$

le domaine étudié est représenté sur un demi-cercle du plan τ (voir figure 95), l'homologue de E a pour argument :

$$\varphi_1 = \frac{\pi (\theta_1 - \theta_0)}{\pi - 2\theta_0}.$$

Or la fonction $U(\tau)$ peut s'écrire immédiatement en vertu des résultats du N° 3.2.2.1.

$$(IV.77) \quad U(\tau) = \frac{-i\alpha}{\pi \beta \sin (\theta_0 - \theta_1)} \log \frac{(\tau + e^{-i\varphi_1})(1 - \tau e^{i\varphi_1})}{(1 + \tau e^{-i\varphi_1})(e^{i\varphi_1} - \tau)}$$

et d'après la formule (III.53) on peut écrire la valeur du coefficient de pression, sur la portion de l'aile intérieure à (Γ) :

$$C_p = \frac{4\alpha}{\pi \beta \sin (\theta_1 - \theta_0)} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi_1}},$$

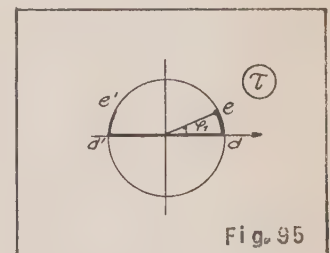


Fig. 95

en posant :

$$x = \beta \operatorname{tg} \omega$$

Pour rattacher θ_1 à l'angle ω_0 définissant les génératrices limites du cône, on remarquera que :

$$\theta_1 = \eta_0 + \theta_0, \quad \text{avec} \quad \cos \eta_0 = \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \omega_0}.$$

Il est facile d'obtenir la composante des efforts normaux sur la face supérieure de chaque demi-aile; on repèrera cette composante par le coefficient sans dimension :

$$C_N = - \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \omega_0} \int_0^{x_0} C_p dx, \quad x_0 = \beta \operatorname{tg} \omega_0;$$

et pour calculer C_N , on passera dans le plan τ :

$$\begin{aligned} C_N &= - \frac{1}{2 \beta \operatorname{tg} \omega_0} \left[\int_{\mathcal{L}} C_p \frac{2 (1-\tau^2)}{(1+\tau^2)^2} d\tau \right] = \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \omega_0} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{R} \left[U(\tau) \frac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^2} d\tau \right] = \\ &= \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \omega_0} \mathcal{R} \left[\int_{\mathcal{L}} U(\tau) \frac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^2} d\tau \right], \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ désignant le contour $e'd'de$ dans le plan τ (figure 95).

Or le calcul de cette intégrale a déjà été fait au numéro 3.2.2.2. D'où :

$$(IV.78) \quad C_N = - \frac{2 \alpha}{\beta \operatorname{tg} \omega_0} \frac{1}{2 \beta} \frac{2}{\cos \varphi_1} \frac{\sin \varphi_1}{\sin (\theta_1 - \theta_0)} = - \frac{2 \alpha}{\beta} \frac{\cos (\eta_0 + \theta_0)}{\cos \varphi_1} \frac{\sin \varphi_1}{\sin (\theta_1 - \theta_0)}.$$

REMARQUES 1) Il va sans dire que l'étude du cas général où α serait variable en envergure peut se faire sans difficulté à l'aide des analogies électriques.

2) Le cas où le cône présentant un dièdre est entièrement intérieur au cône de Mach est plus difficile à traiter. Le domaine où il faut étudier les fonctions $U(Z)$, $V(Z)$, $W(Z)$ est annulaire et, contrairement à ce qui se produisait au numéro 3.1., la représentation conforme d'un tel domaine sur une couronne circulaire ne semble pas immédiate.

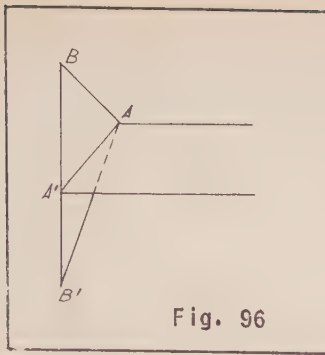
3) Il est possible par "composition" d'étudier l'effet de dièdre sur une aile rectangulaire ou sur une aile en flèche, en employant les méthodes développées au numéro 4.1.

4.3.2.- DERIVE EN BOUT D'AILE.-

Considérons, par exemple, l'extrémité AA' d'une aile rectangulaire et de grand allongement; la dérive sera supposée formée d'une plaque triangulaire, ABB' (fig. 96) que nous pourrions supposer, pour commencer, dans le lit du vent. Nous nous proposons de calculer l'effet de cette dérive sur l'écoulement.

4.3.2.1.- Il est à peu près évident que si les demi-droites AB , AB' sont en dehors du cône de Mach de A , la dérive supprime l'effet de bout de AA' .

Considérons, par exemple, le cas où l'aile se réduit à une plaque portante dans le plan Z , les conditions aux limites, pour le quadrant OAB , sont en effet les suivantes :



$$w = w_0, \text{ sur OA et AB,} \\ v = 0, \text{ sur OB ;}$$

ce sont les mêmes que l'on aurait pour un écoulement autour d'une plaque d'envergure infinie, placée, avec une certaine incidence par rapport au vent.

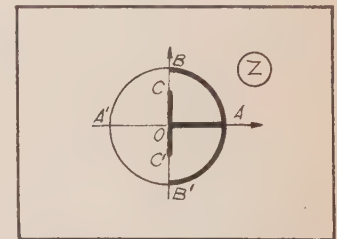
Par contre, dans le quadrant $OA'B$, le mouvement de perturbation est identiquement nul. Ce résultat vaut aussi bien d'ailleurs pour "l'effet d'épaisseur". Il n'y a donc pas là de problème mathématique nouveau, mais simplement une remarque susceptible d'être utilisée dans certains problèmes techniques.

Si maintenant la dérive est elle-même portante, c'est-à-dire si v prend une valeur constante différente de zéro sur la dérive, il y a un cas particulièrement simple où l'on peut conclure immédiatement, c'est celui où les génératrices limites de la dérive sont symétriques par rapport au plan $x_1 O x_2$. En effet, si la dérive était seule, elle donnerait naissance à un écoulement tel que la composante w serait nulle dans le plan $Ox_1 x_2$. Il suffit donc d'ajouter cet écoulement à celui trouvé dans le cas où la dérive est placée dans le lit du vent ⁽¹⁾.

4.3.2.2.- Le cas où les génératrices limites de la dérive sont intérieures au cône de Mach donne lieu à un nouveau problème.

Soient C et C' les images de ces génératrices dans le plan Z (Fig. 97), nous supposons, par exemple que C et C' sont symétriques par rapport à O et nous allons étudier l'effet de dérive sur un problème symétrique élémentaire. Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$w = w_0 \text{ sur le bord supérieur de OA et sur l'arc } \widehat{AB} \\ w = -w_0 \text{ sur le bord inférieur de OA et sur l'arc } \widehat{AB'}, \\ v = 0 \text{ sur les deux bords de OC et de OC' ;}$$



par raison de symétrie, on a aussi $w = 0$ sur OA' .

Nous raisonnerons sur la fonction $Z \frac{dU}{dZ}$ (la fonction $F(Z)$ introduite au numéro 3.1.1., est proportionnelle à $Z \frac{dU}{dZ}$). Les conditions aux limites nous apprennent que sur le contour $ABA'OCOA$, $Z \frac{dU}{dZ}$ est réel. D'autre part,

d'après les résultats acquis au chapitre 3, B est un pôle simple pour cette fonction, alors que C est un point critique d'ordre $p + 1/2$ p étant entier. En reprenant les raisonnements faits au numéro 3.1., on voit que la plus simple (au sens du principe des singularités minimum) des fonctions satisfaisant à ces conditions s'écrit :

$$(IV.79) \quad Z \frac{dU^{(1)}}{dZ} = -\frac{k}{\beta} \frac{Z^2}{(Z^2+1) [(Z^2+c^2)(1+c^2 Z^2)]^{1/2}},$$

nous notons avec l'indice (1) la solution correspondante.

D'ailleurs u est nul sur l'arc $A'B$ et $u = -\frac{w_0}{\beta}$ sur l'arc AB . Par suite, si on prend comme détermination initiale du radical, la détermination positive sur le bord supérieur de OA , on a d'après (III.46) :

(1) Nous avons, pour simplifier, envisagé le cas où les génératrices limites du cône étaient normales au vent, il est facile de traiter également le cas où cette condition ne serait pas satisfaite.

$$k = \frac{2 w_0}{\pi} (1-c^2),$$

l'intégration de (IV.79) ne présente pas de difficulté, il faut naturellement choisir la constante d'intégration pour que $u = 0$, pour $Z = -1$. On trouve :

$$(IV.80) \quad U^{(1)}(Z) = \frac{w_0 i}{\beta \pi} \log \left[\frac{i (1-Z^2) (1-c^2) - 2 \sqrt{(Z^2+c^2) (1+c^2 Z^2)}}{(Z^2+1) (1+c^2)} \right],$$

le logarithme valant $i \pi$ pour $Z = 1$.

Le calcul explicite de $W^{(1)}(Z)$ et $V^{(1)}(Z)$ peut se faire par les fonctions elliptiques. Il faut examiner, en effet, si toutes les conditions aux limites sont bien vérifiées. Or :

$$\frac{dV^{(1)}}{dZ} = + \frac{w_0 (1-c^2)}{\beta \pi} \frac{1}{[(Z^2+c^2) (1+c^2 Z^2)]^{1/2}},$$

par suite, en posant :

$$Z = ic \operatorname{sn}(\tau, c^2),$$

la région du plan Z étudiée a pour image dans le plan τ un rectangle, (voir numéro 3.1.1.8, et figure 34) et on obtient :

$$\frac{dV^{(1)}}{d\tau} = \frac{dV^{(1)}}{dZ} \frac{dZ}{d\tau} = \frac{i w_0}{\pi \beta} (1-c^2),$$

$$V^{(1)} = \frac{i w_0}{\beta \pi} (1-c^2) \left(\tau - i \frac{K'}{2} \right),$$

la constante d'intégration est choisie pour que $v = 0$ sur le cercle (C_0) . La solution $U^{(1)}(Z)$, $V^{(1)}(Z)$, $W^{(1)}(Z)$ ne satisfait donc pas aux conditions aux limites posées; elle correspond au cas où la dérive serait elle-même inclinée sur le vent, la valeur de v sur la dérive étant égale à :

$$(IV.81) \quad v^{(1)} = \frac{w_0}{\beta \pi} \frac{(1-c^2) K'}{2}.$$

D'autre part, on trouve pour $W^{(1)}(Z)$:

$$\frac{dW^{(1)}}{d\tau} = \frac{dW^{(1)}}{dZ} \frac{dZ}{d\tau} = - \frac{w_0 (1-c^2)}{\beta \pi} \frac{1+c^2 \operatorname{sn}^2 \tau}{1-c^2 \operatorname{sn}^2 \tau};$$

$W^{(1)}$ s'exprime donc en fonction de τ par une intégrale elliptique de 3^e espèce.

Ayant ainsi défini la solution $U^{(1)}(Z)$, $V^{(1)}(Z)$, $W^{(1)}(Z)$, il est facile d'obtenir celle qui est relative au problème aux limites posé; il suffit d'ajouter une solution $U^{(2)}(Z)$, $V^{(2)}(Z)$, $W^{(2)}(Z)$, telle que :

- 1) $u^{(2)} = v^{(2)} = w^{(2)} = 0$, sur (C_0) ,
- 2) $w^{(2)} = 0$, sur OA et OA' ,
- 3) $v^{(2)} = -v^{(1)}$, sur les deux bords de la coupure CC' .

Or, cet écoulement est, aux notations près, celui qui a été étudié au numéro 3.1.1.7. En particulier, la valeur de la fonction $U^{(2)}(Z)$ s'écrit :

$$(IV.82) \quad U^{(2)}(Z) = \frac{2}{\beta} \frac{c^2}{c^2+1} \frac{v^{(1)}}{E\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right)} \frac{1-Z^2}{[(c^2+Z^2)(1+Z^2c^2)]^{1/2}}.$$

On obtient ainsi le résultat général suivant: si sur la dérive, on doit avoir $v = v_0$, la valeur de la fonction $U(Z)$ est donnée par la formule:

$$(IV.83) \quad U(Z) = \frac{i w_0}{\beta \pi} \log \left[\frac{i (1-Z^2) (1-c^2) - 2 \sqrt{(Z^2+c^2)(1+c^2Z^2)}}{(1+Z^2)(1+c^2)} \right] + \\ + \frac{2 c^2}{\beta (1+c^2) E\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right)} \left[-v_0 + \frac{w_0}{2\beta\pi} (1-c^2) K' \right] \frac{(1-Z^2)}{\sqrt{(Z^2+c^2)(1+c^2Z^2)}}.$$

On remarquera que, dans le cas où $v_0 \rightarrow 0$ et où $c^2 \rightarrow 1$, on trouve bien, à la limite, le résultat prévu dans le cas où la dérive déborde le cône de Mach (N° 4.3.2.1); et que si $c \rightarrow 0$, on retombe sur la solution du N° 3.2.2.1. (III.57). On peut alors calculer le coefficient de pression sur l'aile (Z réel et positif); on trouve:

$$C_p = \frac{2 w_0}{\beta \pi} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arc cos} \sqrt{(1-x^2)(1-\gamma^2)} \right] + \\ + \frac{\gamma^2}{\beta E(\sqrt{1-\gamma^2})} \left[2 v_0 - \frac{w_0}{\beta \pi} (1-c^2) K' \right] \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2(1-\gamma^2) + \gamma^2}};$$

en posant

$$x = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \gamma = \frac{2c}{1+c^2}.$$

4.3.3.- AILES EN CROIX.-

Pour terminer ces quelques aperçus sur le calcul des effets de dièdre, nous allons donner quelques indications sur le cas des ailes en croix.

Considérons un cône aplati sur les deux plans Ox_1x_2 , Ox_1x_3 . On connaît la fonction w sur les deux faces du triangle OAA' et la fonction v sur les deux faces du triangle OBB'.

Supposons OB et OB' symétriques par rapport à Ox_1x_2 et OA et OA' symétriques par rapport à Ox_1x_3 ; dans ces conditions, l'écoulement autour de l'aile en croix s'obtient d'une façon particulièrement simple. Il suffit de superposer l'écoulement infiniment aplati sur le plan Ox_1x_3 et réalisant les valeurs voulues pour v , et l'écoulement infiniment aplati sur Ox_1x_2 et réalisant les valeurs voulues pour w . En effet, par suite de la symétrie, le premier écoulement donne une valeur de w nulle dans le plan Ox_1x_2 et le second une valeur de v nulle sur Ox_1x_3 .

Le cas où l'aile en croix n'admettrait pas deux plans de symétrie ne peut pas se traiter aussi simplement dans le cas général. En particulier, le cas où les génératrices limites sont toutes intérieures au cône de Mach conduit sans doute à des solutions analytiques difficiles à expliciter, même dans le cas élémentaire. Mais, comme dans toutes ces questions relatives à l'effet de dièdre, la résolution de ces problèmes est facilitée par l'utilisation de représentations conformes qui, si elles sont difficiles à obtenir sous forme analytique explicite, peuvent être déterminées avec précision, par l'utilisation judicieuse de la méthode générale des analogies électriques.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - R. SAUER - *Mathematische Methoden der Gasdynamik*. 1946.
- 2 - P. GERMAIN - *Les approximations linéaires dans l'étude des fluides compressibles*. 3ème Congrès National de l'Aviation Française. 1947.
- 3 - K. OSWATITSCH & K. WIEGHARDT - *Theoretische Untersuchungen über stationäre Potentialströmungen und Grenzschichten bei hohen Geschwindigkeiten*. Preisausschreiben der Lilienthalgesellschaft. 1943
Traduction S. D. I. T. N° 3710.
- 4 - TH. von KARMAN - *Supersonic Aerodynamics Principles and Applications*. *Journal of the aeronautical sciences*. Juillet 1947.
- 5 - E. V. LAITONE - *The Linearized subsonic and supersonic flow about inclined slender bodies of revolution*. *Journal of the aeronautical sciences*. Novembre 1947.
- 6 - H. FREDA - *Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, linéaires hyperboliques*. *Mémoires des sciences mathématiques LXXXIV*. 1937.
- 7 - J. HADAMARD - *Le problème de Cauchy*. Hermann. 1932.
- 8 - G. TEMPLE & H. A. JAHN - *Flutter at supersonic speeds*. *R. et M.* 2140. 1945.
- 9 - A. BUSEMANN - *Infinitesimale kegelige Überschallströmung*. *Schriften der deutsch. Akad. der Luftfahrtforschung* 1943.
- 10 - H. J. STEWART - *The lift of a Delta wing at supersonic speeds*. *Quart of Appl. Math.* Vol. 4. 1946.
- 11 - L. BESCHKINE - *Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses subsoniques*. *Les cahiers d'aérodynamique* N°6, Janvier - Février 1947.
- 12 - HAYES - *Linearized Supersonic Flow with axial Symetry*. *Quarterly of Appl. Math.* IV, 3. 1946.
- 13 - J. PERES - *Cours de mécanique des fluides*. Paris, Gauthiers Villars. 1936.
- 14 - R. T. JONES - *Properties of low aspect ratio pointed wing at speeds below and above the speeds of sound*. *N. A. C. A. A. C. R.* L5 F 13.
- 15 - TH. THEODORSEN - *Theory of wing Section of Arbitrary Shape*. *N. A. C. A. Rep.* N° 411. 1933.

...

- 16 - TH. THEODORSEN & I. E. GARRICK - *General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*
N.A.C.A. Rep. N° 452, 1933.
- 17 - L. MALAVARD - *Sur la solution rhéoelectrique de questions de représentation conforme et application à la théorie des profils d'ailes.*
Comptes rendus Ac. des Sciences t. 218, p. 106-108, 1944.
- 18 - S. E. WARSCHAWSKI - *On Theodorsen's method of conformal Mapping of nearly circular regions.*
Quarterley of Appl. Math. III, 1945.
- 19 - P. GERMAIN - *Sur le calcul pratique de certaines fonctions intervenant dans la théorie des profils.*
1er Congrès de l'Aviation Française, 1945.
- P. GERMAIN - *The computation of certain Functions Occurring in Profile Theory* A.R.C. rep. 8692, 1945.
- 20 - P. GERMAIN - *Sur le calcul numérique de certains opérateurs linéaires.*
Comptes rendus Ac. des Sciences t. 220 p. 765-768. 1945.
- 21 - E. J. WATSON - *Formulae for the Computation of the Functions employed for calculating the velocity distribution about a given aerofoil.*
Report and Memoranda N° 2176, 1945.
- 22 - I. NAIMAN - *Numerical Evaluation by Harmonic Analysis of the "Function of the Theodorsen Arbitrary Airfoil Potential Theory".*
N.A.C.A. Wartime Report, L. 153, 1945.
- 23 - B. THWAITES - *A Method by P. Germain for the practical Evaluation of the integral :*
- $$\varepsilon(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\Phi) \cot \frac{\Phi - \theta}{2} d\Phi.$$
- A.R.C. Rep. N° 8660; 1945.
- 24 - E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON - *A course of Modern Analysis; Cambridge University Press.*
- 25 - L. MALAVARD - *Application des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'hydrodynamique.*
Public. sc. et Tech. du Ministère de l'Air fasc. 57, 1934.
- 26 - L. MALAVARD - *Etude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie de l'aile; application à leur solution de l'analogie rhéoelectrique.*
Publi. sc. et tech. du Ministère de l'Air fasc. 153, 1939.
- 27 - L. MALAVARD - *L'analogie électrique comme méthode auxiliaire de la photo-élasticité.*
Comptes rendus Acad. des Sciences, t. 206, p. 39. 1938.
- 28 - J. PERES & L. MALAVARD - *Application du calcul expérimental rhéoelectrique à la solution de quelques problèmes d'élasticité.*
Journ. math. pures et appliquées, t. XX, 1941.

- 29 - H. VILLAT - *Leçons sur l'hydrodynamique.*
Paris Gauthiers Villars, 1929.
- 30 - A. E. PUCKETT - *Aerodynamic performance of Delta Wing at Supersonic*
& H. J. STEWART *Speed.*
Journ. of Aeron. Sciences XIV, octobre 1947.
- 31 - M. J. LIGHTHILL - *The Supersonic Theory of Wings of finite Span.*
Report and Memoranda N° 2001, 1944.
- 32 - R. M. SNOW - *Aerodynamics of quadrilateral Wing at supersonic Speeds.*
Quart. of Appl. Math. 1948.
- 33 - A. BONNEY - *Aerodynamic Characteristics of Rectangular Wings at*
Supersonic Speeds.
Journal of the Aeronautical Sciences, 1947.
- 34 - SCHLICHTING - *Tragflügeltheorie bei Überschallgeschwindigkeit;*
Luftfahrtforschung XIII, 1936.
- 35 - Th. von KARMAN - *The resistance of slender bodies moving with*
& H. B. MOORE *Supersonic velocities with special reference to projectiles*
Trans. A. S. M. E. vol. 54, 1932.
- 36 - M. J. LIGHTHILL - *Supersonic Flow past Bodies of Revolution.*
Report and Memoranda, N° 2003, 1945.

N. B. - Les principales questions traitées dans ce mémoire ont été résumées dans un certain nombre de notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences :

Tome 224 - 1947 p. 183;
Tome 225 - 1947 p. 487,

Tome 226 - 1948 p. 311,
Tome 226 - 1948 p. 1126.

A N N E X E

N° 1 - THEOREME D'EXISTENCE ET SINGULARITÉS
DE LA SOLUTION POUR UN ECOULEMENT INFINIMENT APLATI SUR UN PLAN

1. Généralités.

La méthode des sources, qu'il serait plus exact d'appeler "méthode de la solution fondamentale d'Hadamard", permet l'étude générale des écoulements autour des obstacles infiniment aplatis sur un plan. Indépendamment plusieurs auteurs (voir réf. 1, 2, 3, 4, de la bibliographie annexe) ont étudié ce problème. En collaboration avec M. R. BADER, nous avons nous-même étudié cette question. Le rapport correspondant (réf. 5) n'ayant pas fait l'objet d'une publication officielle, nous donnerons ici les résultats qui nous paraissent originaux, par rapport aux études citées. Les notations étant les mêmes que dans le texte, le problème peut se formuler de la façon suivante :

Trouver une solution $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ satisfaisant à l'équation :

$$L(\varphi) = \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 ,$$

et aux conditions aux limites :

(1) à l'infini amont : $\varphi = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0$;

(2) sur (S), projection sur Ox_1x_2 de l'obstacle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = k^+(x_1, x_2) , \quad \text{pour } x_3 = +0 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = k^-(x_1, x_2) , \quad \text{pour } x_3 = -0 ;$$

k^+ et k^- sont des fonctions connues, satisfaisant aux conditions de régularité (II) relatives à $\partial \varphi / \partial x_3$, qui seront précisées plus bas.

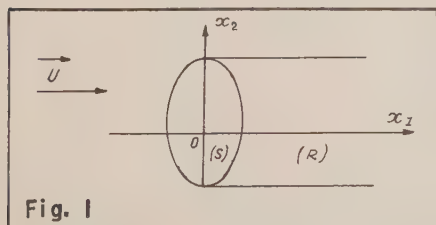


Fig. 1

Pour poser correctement le problème il faut en outre préciser les hypothèses de régularité que nous imposons à la solution; nous appellerons (R) la partie de Ox_1x_2 qui correspond au sillage du corps aplati sur (S).

...

- (I) φ est continue, sauf éventuellement à travers le plan $x_1 = 0$ sur (S) et (R).
 (II) Les dérivées premières et secondes de φ existent et sont en général continues à l'extérieur de (S); il y a éventuellement exception à travers certaines surfaces caractéristiques où elles peuvent avoir, soit des discontinuités de première espèce en un point régulier, soit des infinies en un point exceptionnel. Sur (S) elles peuvent avoir des infinies, cependant, pour satisfaire aux hypothèses de linéarisation, $\partial\varphi/\partial x_3$ ne peut devenir infinie que sur des parties de la frontière de (S) quand on y tend en restant extérieur à (S).

Nous supposons en outre $\partial\varphi/\partial x_3$ et $\partial\varphi/\partial x_1$ continues quand on traverse Ox_1x_2 en un point extérieur à (S). Cette hypothèse pour $\partial\varphi/\partial x_3$ a une signification physique immédiate; pour $\partial\varphi/\partial x_1$ également si on se rappelle que cette quantité est proportionnelle à la pression. Autrement dit, seul $\partial\varphi/\partial x_2$ peut avoir une discontinuité de première espèce à travers Ox_1x_2 .

Enfin comme au chapitre 3, φ peut être décomposé en ses parties impaire et paire par rapport à x_3 . Si φ est impaire en x_3 (problème symétrique), $\partial\varphi/\partial x_3 = 0$ en dehors de (S). Si φ est paire en x_3 (problème portant), $\partial\varphi/\partial x_1 = 0$ dans Ox_1x_2 en dehors de (S), comme cela résulte des hypothèses (II).

2. Formule fondamentale.

Nous utiliserons la formule de Green généralisée :

$$\iiint_V \left[u L(v) - v L(u) \right] d\tau = - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} \right] d\sigma ,$$

Σ étant la surface d'élément $d\sigma$ limitant le volume V d'élément $d\tau$; les dérivées d/dv sont les dérivées suivant la direction transversale. Ainsi, si Σ est définie par $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ avec $F(x_1, x_2, x_3) > 0$ à l'extérieur de V , on a :

$$- \frac{d}{dv} = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Enfin, en utilisant la notion de "partie finie" d'une intégrale due à Hadamard, on peut appliquer la formule de Green à des fonctions u et v rendant infinies les intégrales mises en jeu. On écrit alors :

$$\iiint_V \left[u L(v) - v L(u) \right] d\tau = - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} \right] d\sigma .$$

Considérons en un point $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ($\xi_3 > 0$ par exemple), l'avant cône de Mach Γ et coupons-le par le plan $x_1 = -A$ où A est positif et très grand, et par le plan $x_3 = 0$. Nous déterminons ainsi un volume V dans la région $x_3 > 0$ limité par une surface Σ . Admettant l'existence de φ , nous appliquons la formule de Green au couple :

$$u = \varphi(x_1, x_2, x_3) , \quad v = H = \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 - \beta^2 [(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2]}} ;$$

H est la solution fondamentale au sens d'Hadamard pour l'équation des ondes.

Nous ne pouvons ici entrer dans tous les détails et toutes les justifications, mais nous noterons les principales étapes de la démonstration.

a) On montre qu'on peut effectivement appliquer la formule de Green généralisée au couple φ, H , même si les dérivées de φ présentent des discontinuités de première espèce, ceci en vertu de (II) qui nous apprend que ces discontinuités se présentent sur des surfaces caractéristiques.

b) Pour la partie de Σ située sur $x_1 = -A$, l'intégrale double s'annule en vertu des conditions aux limites.

c) Sur le cône (Γ) l'intégrale double doit être prise en partie finie. Introduisons le cône Γ_ε d'équation :

$$\beta^2 [(x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2] = (1 - \varepsilon)^2 (x_1 - \xi_1)^2 ,$$

et le plan P_δ :

$$x_1 = \xi_1 - \delta , \quad (\delta > 0) ;$$

ε et δ étant petits; on calculera l'intégrale double sur la surface voisine de Σ formée d'une part de Γ_ε et d'autre part du cercle $C_{\varepsilon\delta}$, section de Γ_ε par le plan P_δ . On montre facilement que la contribution due à Γ_ε a une partie finie nulle, et que celle due à $C_{\varepsilon\delta}$ est $-2\pi\varphi(P)$. Par suite en désignant par h la section de (Γ) par $x_3 = 0$, on obtient la relation :

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_h \varphi \frac{\partial H}{\partial x_3} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_h H \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d\sigma .$$

d) Pour éliminer φ au deuxième membre, on peut appliquer la méthode des images utilisée par V. VOLTERRA dans un problème analogue. Soit P' le symétrique de P par rapport à Ox_1x_2 ; appliquons la formule de Green au volume V situé dans $x_3 > 0$ limité par les plans $x_1 = -A$, $x_3 = 0$ et l'avant cône de Mach de P' , en posant :

$$u = \varphi(x_1, x_2, x_3) , \quad v = \bar{H} = H(P') ;$$

on obtient ainsi :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \iint_h \varphi \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_h \bar{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d\sigma ,$$

et comme pour $x_3 = 0$:

$$\bar{H} = H , \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_3} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} ,$$

on a :

$$\iint_h \varphi \frac{\partial H}{\partial x_3} d\sigma = - \iint_h H \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d\sigma .$$

En rapprochant ce résultat du précédent, on obtient la formule fondamentale cherchée :

$$\varphi(P) = -\frac{1}{\pi} \iint_h H \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d\sigma = \frac{1}{\pi} \iint_h \varphi \frac{\partial H}{\partial x_3} d\sigma .$$

3. Le théorème d'existence pour le problème symétrique.

Dans un problème symétrique on connaît $\partial\varphi/\partial x_3$ sur chaque face de $x_3=0$; par suite on peut calculer φ dans tout l'espace. L'existence de la solution sera acquise si on vérifie que cette fonction φ satisfait à $L(\varphi) = 0$, aux conditions aux limites, et aux conditions de régularité.

a) $L(\varphi) = 0$, car les fonctions $k(x_1, x_2)$ satisfaisant aux hypothèses de régularité, on peut calculer les dérivées de φ en dérivant sous le signe somme par rapport aux coordonnées de P. Comme seul H dépend de ces coordonnées et que H satisfait à $L(H) = 0$, le résultat s'en suit comme l'a montré Hadamard d'une façon très générale.

b) Pour vérifier les conditions aux limites, il faut montrer que :

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \iint_h \frac{\partial H}{\partial \xi_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d\sigma = k^+(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_3 > 0);$$

on peut faire facilement cette vérification en posant :

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\beta \xi_3}{(1-\mu) \sin \theta}, \quad x_2 = \xi_2 - \xi_3 \cot \theta,$$

dans l'intégrale, puis en faisant le passage à la limite indiqué.

c) La vérification des conditions de régularité conduit à étudier soigneusement le comportement de φ et de ses dérivées. Nous ne pouvons ici que donner les conclusions de cette étude.

A. Dans le plan Ox_1x_2 , soient P^+ et P^- deux points alignés avec P tels que :

$$P^+P = P^-P = \varepsilon$$

-1- S'il n'y a que des points isolés de discontinuité de $\partial\varphi/\partial x_3$ sur les lignes de Mach avant de P et si $\partial\varphi/\partial x_3$ est continue en P :

$$\varphi(P^+) = \varphi(P^-) + O(\varepsilon),$$

c'est-à-dire que φ est continu en P, d'ordre ε . Un résultat analogue vaut pour les dérivées premières $\partial\varphi/\partial x_1$, $\partial\varphi/\partial x_2$.

-2- S'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur les lignes de Mach avant de P et si P est un point d'une ligne supersonique (voir chap.4) de discontinuité pour $\partial\varphi/\partial x_3$, φ est continue d'ordre ε , mais $\partial\varphi/\partial x_1$ et $\partial\varphi/\partial x_2$ ont des discontinuités de première espèce. En particulier si la tangente à la ligne de discontinuité en P fait l'angle ω avec Ox_1 , les discontinuités de $\partial\varphi/\partial x_1$ et de $\partial\varphi/\partial x_3$ sont liées par la relation bien connue :

$$\Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{\beta^2 \operatorname{tg}^2 \omega - 1}} \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right).$$

- 3 - S'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur les lignes de Mach avant de P, et si P est un point d'une ligne subsonique de discontinuité, les dérivées premières de φ deviennent infinies comme $\log \varepsilon$, quand on tend vers P.
- 4 - S'il y a une discontinuité de $\partial\varphi/\partial x_3$ sur tout un segment d'une des lignes de Mach avant de P, les dérivées premières de φ y deviennent infinies comme $\varepsilon^{-1/2}$.

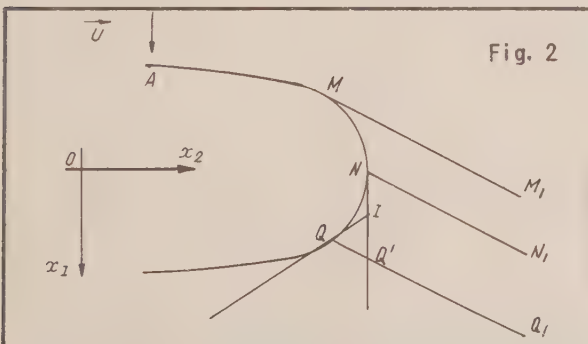
B. En dehors du plan Ox_1x_2 on a les résultats suivants :

- 1 - Si la frontière de h n'est en aucun point tangente à une ligne de discontinuité de $\partial\varphi/\partial x_3$, ni ne contient aucune partie finie d'une telle ligne, les dérivées premières de φ sont continues et d'ordre ε .
- 2 - Si la frontière de h est tangente en certains points à une ligne de discontinuité de $\partial\varphi/\partial x_3$, sans contenir aucune partie finie d'une telle ligne, P est situé sur la surface caractéristique qui a pour directrice cette ligne de discontinuité et les dérivées premières de φ admettent des discontinuités de première espèce en P à la traversée de cette surface.
- 3 - Si exceptionnellement la frontière de h contient une partie d'une ligne de discontinuité de $\partial\varphi/\partial x_3$, les dérivées premières de φ deviennent infinies comme $\varepsilon^{-1/2}$; un tel point est d'ailleurs nécessairement isolé.

L'ensemble de ces résultats montrent que les conditions de régularité se trouvent satisfaites, ce qui prouve l'existence de la solution ainsi trouvée.

4. Le théorème d'existence pour le problème portant.

Nous insisterons moins sur le calcul de la solution que l'on pourra trouver dans les mémoires publiés déjà cités, en particulier réf.4, que sur l'étude de ses singularités. Pour faire toutefois cette étude il nous faut brièvement indiquer comment se fait ce calcul, nous le feront dans le cas le plus simple, celui où les bords de l'aile sont indépendants (voir fig.2).



La formule fondamentale permet le calcul du potentiel quand on connaît $\partial\varphi/\partial x_3$ sur tout le plan Ox_1x_2 .

Or il est clair que cette quantité est nulle en amont de la ligne AMM_1 , MM_1 étant la caractéristique tangente au bord d'attaque de l'aile.

Pour calculer cette quantité dans les régions où elle reste provisoirement inconnue, il est indiqué de faire le changement de variable :

$$\begin{cases} x_1 - \beta x_2 = \lambda, \\ x_1 + \beta x_2 = \mu, \end{cases}$$

$$k(x_1, x_2) = K(\lambda, \mu).$$

Si $\mu = \mu_1(\lambda)$ et $\mu = \mu_2(\lambda)$ sont les équations des arcs AM et MNQ, on a en un point λ_0, μ_0 , de la région M_1MNN_1 (puisque dans cette région φ est nul) l'équation :

$$I(\lambda_0, \mu_0) = \int_{\lambda_M}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}} \int_{\mu_1(\lambda)}^{\mu_2(\lambda)} \frac{K(\lambda, \mu) d\mu}{\sqrt{\mu_0 - \mu}} + \int_{\lambda_M}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}} \int_{\mu_2(\lambda)}^{\mu_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu_0 - \mu}} = 0 ,$$

équation qui entraîne l'égalité :

$$\int_{\mu_2(\lambda)}^{\mu_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu_0 - \mu}} + \int_{\mu_1(\lambda)}^{\mu_2(\lambda)} \frac{K(\lambda, \mu)}{\sqrt{\mu_0 - \mu}} d\mu = 0 ,$$

qui détermine $\partial \varphi / \partial x_3 (\lambda_0, \mu_0)$ par l'inversion d'une équation d'Abel. On trouve (réf.4) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = - \frac{1}{\pi \sqrt{\mu_0 - \mu_2(\lambda_0)}} \int_{\mu_1(\lambda_0)}^{\mu_2(\lambda_0)} \frac{K(\lambda_0, \mu') \sqrt{\mu_2(\lambda_0) - \mu'}}{\mu - \mu'} d\mu' .$$

On connaît ainsi $\partial \varphi / \partial x_3$ dans la région M_1MNN_1 .

En un point où $\varphi(\lambda_0, \mu_0)$ n'est pas nul (par exemple sur le sillage), on a :

$$- 2\pi\beta\varphi(\lambda_0, \mu_0) = I(\lambda_0, \mu_0) ,$$

ce qui, après une double inversion d'Abel, donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(\lambda_2, \mu_2) = - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \mu_2} \int_{\mu_2(\lambda_2)}^{\mu_2} \frac{d\mu_0}{\sqrt{\mu_2 - \mu_0}} \int_{\mu_1(\lambda_2)}^{\mu_2(\lambda_2)} \frac{K(\lambda_2, \mu) d\mu}{\sqrt{\mu_0 - \mu}} - \frac{2\beta}{\pi} \frac{\partial}{\partial \mu_2} \int_{\mu_2(\lambda_2)}^{\mu_2} \frac{d\mu_0}{\sqrt{\mu_2 - \mu_0}} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \int_{\lambda_M}^{\lambda_2} \frac{\varphi d\lambda_0}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_0}} .$$

Cette équation contient deux fonctions inconnues, et en général il sera impossible de les déterminer toutes deux si l'on n'introduit pas une hypothèse supplémentaire. Mais si on suppose que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \text{ est continue dans } O x_1 x_2 \text{ à la traversée du bord de fuite subsonique,}$$

nous allons voir qu'il est d'abord facile de calculer φ sur le sillage, et par suite $\partial \varphi / \partial x_3$ dans $O x_1 x_2$. L'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_2 - \mu_2(\lambda_2)}} \int_{\mu_1(\lambda_2)}^{\mu_2(\lambda_2)} \frac{K(\lambda_2, \mu) d\mu}{\sqrt{\mu_2(\lambda_2) - \mu}} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_2(\lambda_2)}^{\mu_2} \frac{d\mu_0}{\sqrt{\mu_2 - \mu_0}} \int_{\mu_2(\lambda_2) - \varepsilon}^{\mu_2(\lambda_2)} \frac{K(\lambda_2, \mu) d\mu}{(\mu_0 - \mu)^{3/2}} + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_2(\lambda_2)}^{\mu_2} \frac{d\mu_0}{\sqrt{\mu_2 - \mu_0}} \int_{\mu_1(\lambda_2)}^{\mu_2(\lambda_2) - \varepsilon} \frac{K(\lambda_2, \mu) d\mu}{(\mu_0 - \mu)^{3/2}} - \frac{2\beta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_2 - \mu_2(\lambda_2)}} \int_{\lambda_N}^{\lambda_2} \frac{\varphi'_{\lambda_0}[\lambda_0, \mu_2(\lambda_2)]}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_0}} d\lambda_0 - \\
& - \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mu_2(\lambda_2)}^{\mu_2} \frac{d\mu_0}{\sqrt{\mu_2 - \mu_0}} \frac{\partial}{\partial \mu_0} \int_{\lambda_N}^{\lambda_2} \frac{\varphi'_{\lambda_0}(\lambda_0, \mu_0)}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_0}} d\lambda_0 .
\end{aligned}$$

Si on fait tendre μ_2 vers $\mu_2(\lambda_2)$, ε étant une quantité petite, on voit que d'après l'hypothèse précédente, le deuxième terme du second membre tend vers $\partial \varphi / \partial x_3 (\lambda_2, \mu_2)$, tandis que le troisième tend vers zéro. Faisons de plus l'hypothèse provisoire que le dernier terme tend vers zéro (hypothèse qu'il faudra vérifier par la suite), il vient :

$$\int_{\mu_1(\lambda_2)}^{\mu_2(\lambda_2)} \frac{K(\lambda_2, \mu) d\mu}{\sqrt{\mu_2(\lambda_2) - \mu}} + 2\beta \int_{\lambda_N}^{\lambda_2} \frac{\varphi'[\lambda_0, \mu_2(\lambda_2)]}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_0}} d\lambda_0 = 0 .$$

Mais comme dans le sillage, φ garde une valeur constante sur les parallèles à Ox_1 , il suffit par exemple de connaître les valeurs du potentiel sur la droite QI (fig.2), pour les connaître partout. En vertu de cette remarque :

$$\int_{\lambda_I}^{\lambda} \frac{\varphi'(\lambda_0, \mu_0)}{\sqrt{\lambda - \lambda_0}} d\lambda_0 = -\frac{1}{2\beta} \int_{\mu_1(\lambda_{p,1})}^{\mu_2(\lambda_{p,1})} \frac{K(\lambda_{p,1}, \mu)}{\sqrt{\mu_2(\lambda_{p,1}) - \mu}} d\mu ,$$

ou :

$$\varphi(\lambda_0, \mu_0) = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_{\lambda_I}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}} \int_{\mu_1(\lambda_{p,1})}^{\mu_2(\lambda_{p,1})} \frac{K(\lambda_{p,1}, \mu)}{\sqrt{\mu_2(\lambda_{p,1}) - \mu}} d\mu ,$$

si on définit $\lambda_{p,1}$ par :

$$\lambda - \lambda_{p,1} = \mu_0 - \mu_2(\lambda_{p,1}) .$$

Remarquons que la circulation le long du bord de fuite subsonique se trouve ainsi calculée.

Il reste à vérifier le bien fondé de l'hypothèse provisoire faite au cours du calcul, ce qui peut se faire sans difficultés. On voit ainsi comment peut se déterminer la solution du problème portant.

Pour établir que la solution calculée répond complètement au problème, c'est-à-dire le théorème d'existence, on procède comme dans le cas symétrique; tout revient donc en définitive à l'étude des singularités de cette solution, étude qui permet une vérification à posteriori des conditions de régularité. Pour faire cette étude, il est indiqué d'étudier au préalable le comportement de $\partial\varphi/\partial x_3$ dans le plan Ox_1x_2 . Comme plus haut nous indiquerons les résultats sans démonstration.

a) Etude de $\partial\varphi/\partial x_3$ dans Ox_1x_2 .

On voit d'abord immédiatement que $\partial\varphi/\partial x_3$ augmente indéfiniment comme $\varepsilon^{-1/2}$ lorsqu'on tend vers le bord d'attaque subsonique MN en restant extérieur à (S). D'autre part, par hypothèse, cette quantité est continue, sur le bord de fuite subsonique NQ. Précisons maintenant son comportement le long de la caractéristique NN_1 ; un calcul assez simple que nous ne pouvons reproduire ici pour ne pas allonger la rédaction permet de montrer que :

Le long de la ligne $\lambda = \lambda_N$, $\mu > \mu_N$, $\partial\varphi/\partial x_3$ subit une discontinuité de première espèce égale à :

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu_2 - \mu_2(\lambda_N)}} \int_{\mu_1(\lambda_N)}^{\mu_2(\lambda_N)} \frac{K(\lambda_N, \mu)}{\sqrt{\mu_2(\lambda_N) - \mu}} d\mu.$$

La manière dont $\partial\varphi/\partial x_3$ est calculé montre alors facilement que $\partial\varphi/\partial x_3$ ne possède pas d'autres discontinuités dans le plan Ox_1x_2 , en dehors de (S) naturellement.

b) Etude de la solution dans Ox_1x_2 .

Ce qui a été dit pour le problème symétrique reste valable moyennant les modifications suivantes :

Tout d'abord le long du bord d'attaque subsonique, $\partial\varphi/\partial x_1$ et $\partial\varphi/\partial x_2$ deviennent infinis comme $\varepsilon^{-1/2}$. D'autre part, fait très important, les dérivées $\partial\varphi/\partial x_1$ et $\partial\varphi/\partial x_2$ subissent des discontinuités de première espèce le long des caractéristiques issues des points frontières entre bord d'attaque subsonique et bord de fuite subsonique. [Pour $\partial\varphi/\partial x_1$ une telle discontinuité ne peut avoir lieu toutefois que sur (S)].

c) Etude dans l'espace.

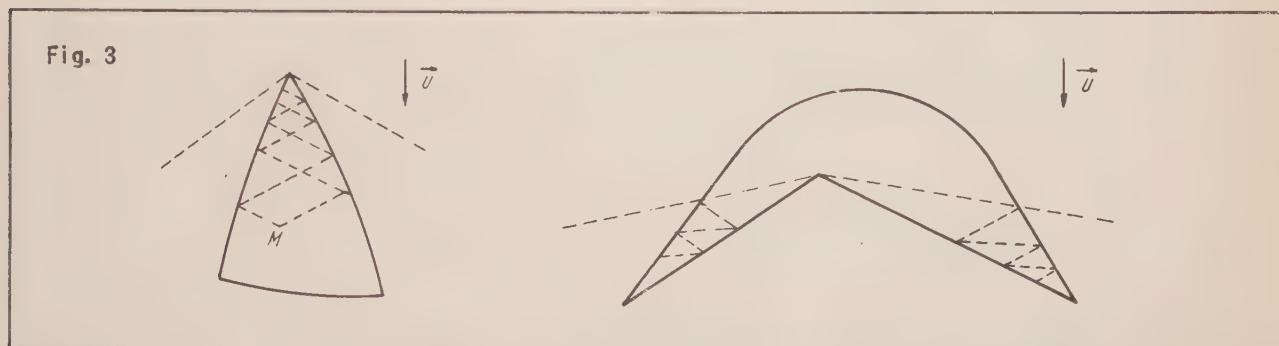
Le seul fait vraiment nouveau à signaler est que, à travers les cônes de Mach postérieurs des points frontières entre bord d'attaque et bord de fuite subsoniques, les dérivées premières subissent une discontinuité de première espèce.

5. Remarques finales.

a) Nous nous sommes attachés à démontrer l'existence de la solution, mais le procédé de démonstration employé montre en même temps que la solution est unique. Par suite toute solution répondant aux hypothèses trouvées par d'autres méthodes (et en particulier par celle des mouvements coniques et homogènes) représente l'unique solution au problème posé.

b) On remarquera encore que l'hypothèse supplémentaire introduite le long du bord de fuite subsonique dans le cas d'un problème portant peut aussi s'exprimer en disant que le long de cette ligne la pression reste continue. Ceci est une conséquence immédiate de l'étude du comportement de la solution.

c) Nous n'avons pas cherché ici à étudier le type le plus général de surface (S). En général la méthode peut s'appliquer moyennant quelques précautions (voir réf.4 ou réf.5). Toutefois il y a des cas où l'application de cette méthode échoue, actuellement, par exemple le cas où l'aile ne possède pas de bord d'attaque supersonique, ou encore pour certaines dispositions du bord de fuite. La figure 3 montre de tels exemples; le tracé de quelques lignes de Mach fait comprendre immédiatement la raison de cet échec.



d) Un des avantages de la méthode qui vient d'être exposée est d'être effectivement applicable à des problèmes très généraux. Toutefois, selon nous, elle ne retire pas son intérêt à la méthode des mouvements coniques, car dans beaucoup de problèmes particuliers que pose l'aéronautique, la méthode des mouvements coniques (et celle des mouvements homogènes) permet d'aboutir plus simplement au résultat cherché.

e) La méthode de la solution fondamentale a le grand mérite de permettre l'étude des circonstances générales de l'écoulement en particulier l'étude de certaines discontinuités de pression que l'on rencontre à la surface même de l'aile dans certains problèmes portants.

N° 2 - SUR LES MOUVEMENTS HOMOGÈNES

Nous avons développé la théorie des mouvements homogènes ⁽¹⁾ et donné quelques applications dans un récent article (réf.7). Nous donnerons ici quelques compléments sur l'étude générale faite au n° 1.3. (page 16). Si on pose :

$$\varphi_{(p,q,r)}^{(n)} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r}, \quad (p+q+r=n),$$

les $\varphi_{(p,q,r)}^{(n)}$ ne dépendent que de χ et θ dans un mouvement homogène d'ordre n . A l'intérieur du cône de Mach (Γ), ces quantités peuvent être considérées comme les parties réelles de fonctions analytiques de la variable Z , définies à une constante additive près purement imaginaire, que nous noterons : $\Phi_{(p,q,r)}^{(n)}(Z)$.

Un problème de mouvements homogènes se traite sur les dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Ces dérivées $n^{\text{ièmes}}$ sont liées par les relations de compatibilité qui peuvent s'exprimer de la manière suivante :

Toutes les expressions :

$$\left(-\frac{1}{\beta}\right)^{p+q} \left(\frac{2Z}{Z^2+1}\right)^p \left(\frac{2iZ}{Z^2-1}\right)^q \frac{d\Phi_{(n-p-q,p,q)}^{(n)}}{dZ}$$

sont identiques quels que soient les entiers p et q satisfaisant aux inégalités :

$$0 \leq p + q \leq n.$$

Pour exprimer les conditions aux limites avec les dérivées $n^{\text{ièmes}}$, et pour passer des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ au calcul du potentiel ou de la pression ($C_p = -u$), on utilisera une généralisation de l'identité d'Euler :

$$\varphi = \frac{1}{n!} \left[x_1 \varphi_{(1,0,0)}^{(1)} + x_2 \varphi_{(0,1,0)}^{(1)} + x_3 \varphi_{(0,0,1)}^{(1)} \right]^n,$$

formule dans laquelle il faut faire la convention suivante sur les $\varphi^{(k)}$:

$$\left[\varphi_{(1,0,0)}^{(1)} \right]^p \left[\varphi_{(0,1,0)}^{(1)} \right]^q \left[\varphi_{(0,0,1)}^{(1)} \right]^r = \varphi_{(p,q,r)}^{(p+q+r)}.$$

On trouvera dans l'article cité une application de ces principes généraux au cas des mouvements aplatis sur un plan. Les méthodes utilisées au chapitre 3 se laissent généraliser sans aucune difficulté; on peut également utiliser dans cette étude l'analogie rhéoelectrique. Une superposition de mouvements homogènes permet très simplement l'étude ⁽²⁾ d'une classe assez large d'ailes Δ : " les ailes Δ à sections affines ".

(1) Simultanément cette question a fait l'objet d'un article de M. PORITZKY (réf.6). Mais cet auteur semble être allé moins loin que nous dans l'étude des mouvements homogènes.

(2) On se reportera également à l'article de M. FENAIN, qui paraîtra prochainement dans "La Recherche Aéronautique", où l'on trouvera l'étude complète d'un certain nombre de cas particuliers.

N° 3 - SUR LES METHODES UTILISEES AU CHAPITRE 3

L'exposé de certaines questions du chapitre 3 pourrait être assez simplifié, non seulement en supprimant certains calculs intermédiaires tout à fait élémentaires, que nous avons mentionnés pour faciliter la lecture, mais aussi en employant des méthodes légèrement différentes ⁽¹⁾. Tout d'abord comme nous l'avons remarqué dans le texte, en se plaçant dans le plan z certaines simplifications apparaissent. Ainsi le problème symétrique peut se résoudre par les mêmes formules quelle que soit la position de l'obstacle par rapport au cône de Mach. Toutefois il faut faire très attention aux déterminations de la solution quand on passe d'un cas à l'autre, la solution devant être suivie par continuité. Nous avons utilisé ici de préférence le plan Z , parce que les relations de compatibilité en Z ne font pas intervenir de fonctions multiformes et par suite, si les calculs sont parfois un peu plus longs, les difficultés théoriques sont nettement moins importantes. En particulier la démonstration des théorèmes des numéros 3.1.1.3 et 3.1.1.4 est nettement plus simple lorsqu'on utilise le plan Z . En résumé on peut dire que le plan Z est plus simple théoriquement, le plan z plus simple pour les calculs ⁽²⁾.

M. WARD a exposé la solution de certains problèmes élémentaires relatifs à des obstacles aplatis sur un plan par une méthode très élégante (réf.8). Son étude repose sur une solution de l'équation des ondes cylindriques donnée par Whittaker. Avec nos notations :

$$\varphi = \int_C (x_1 - \beta x_2 \operatorname{ch} u + i \beta x_3 \operatorname{sh} u) f(u) du$$

est le potentiel d'un mouvement conique, pourvu que le contour C joigne deux points u_1 et u_2 tels que u_1 et u_2 soient racines de l'équation :

$$x_1 - \beta x_2 \operatorname{ch} u + i \beta x_3 \operatorname{sh} u = 0 ;$$

la fonction $f(u)$ est par contre arbitraire.

Cette expression très élégante de φ fournit les relations de compatibilité et permet la résolution des problèmes particuliers. Les mouvements homogènes sont donnés par les solutions de l'équation des ondes de la forme :

$$\int_C (x_1 - \beta x_2 \operatorname{ch} u + i \beta x_3 \operatorname{sh} u)^n f(u) du .$$

Toutefois il semble difficile dans le cas de problèmes homogènes d'ordre n , de poser clairement le problème aux limites et de le résoudre par cette voie, sans retomber dans des méthodes strictement équivalentes à celles que nous avons employées.

(1) Nous avons dans des conférences au Centre d'Etudes supérieures de mécanique (1949), fait un exposé sur les mouvements coniques aplatis sur un plan très différent dans la forme de celui qui est donné dans ce travail.

(2) Il peut en être de même pour les analogies électriques. (Voir à ce sujet l'article de M. FENAIN déjà cité).

N° 4 - SUR L'HYPOTHESE COMPLEMENTAIRE AU BORD DE FUITE SUBSONIQUE

La question posée au N° 3.3 et que nous laissons pendante semble pouvoir admettre une réponse pratiquement définitive; il faut retenir les mouvements du type II donnant lieu à une discontinuité de potentiel le long du sillage de l'aile. Mais comme nous l'avons dit, ceci résulte d'une hypothèse clairement formulée à l'annexe n° 1 et que l'on peut énoncer :

Le gradient du potentiel est continu à travers un bord de fuite subsonique. Toutes les remarques faites à 3.3 sur les conséquences de cette hypothèse restent valables.

L'argument le plus décisif en sa faveur est que parmi toutes celles que l'on peut faire, qui assurent la continuité de ϕ c'est celle qui se présente comme étant la plus simple.

Dans le cas des mouvements coniques infiniment aplatis sur un plan, nous avons vu qu'elle entraîne une ligne de singularités suivant Ox_1 le long de laquelle w est infini, lorsque le corps admet un bord de fuite. Une telle circonstance ne se présente pas dans le cas général (voir Annexe n° 1). Toutes les méthodes du chapitre 3 peuvent s'appliquer au calcul des mouvements coniques pour lesquels on doit tenir compte de cette hypothèse complémentaire. Nous avons en particulier indiqué ailleurs ⁽¹⁾ comment on doit opérer dans ce cas pour le calcul analogique de la solution.

N° 5 - REMARQUE SUR LES AILES EN FLECHE A BORD D'ATTAQUE SUBSONIQUE ⁽²⁾

La formule (IV.37) peut encore s'écrire :

$$C_x = - \frac{4 \cos^2 \gamma (1 + 2 \sin^2 \gamma - M^2 \cos^2 \gamma)}{\pi \sin \gamma (1 - M^2 \cos^2 \gamma)^{3/2}} \int_0^1 \alpha(x) dx \int_0^1 \alpha(\xi) \log |x - \xi| d\xi .$$

Cette formule se prête bien à une recherche d'optimum. Cherchons en effet le profil, qui délimitant une aire donnée, fournit une trainée minimum; on est conduit en posant :

$$e(x) = \int_0^x \alpha(t) dt ,$$

à chercher le minimum de la valeur absolue de l'intégrale :

$$\int_0^1 de(x) \int_0^1 de(\xi) \log |x - \xi| .$$

(1) Communication au VIIème Congrès International de Mécanique appliquée (1948).

(2) Cette remarque a été faite par l'auteur au cours de la communication au VIIème Congrès International de Mécanique appliquée (1948), déjà cité.

Or il est facile de voir, et le fait est bien connu des aérodynamiciens, que la fonction $e(x)$ solution de ce problème est de la forme :

$$e(x) = k \sqrt{1-x^2} ,$$

c'est-à-dire que le profil cherché est une ellipse.

L'étude qui conduit à (IV.37) ne s'applique pas au cas où le profil a une tangente normale à l'axe de symétrie; mais suivant une remarque déjà souvent faite, on peut néanmoins penser que le résultat trouvé n'est pas sans rapport avec la réalité.

Ceci conduit à penser que dans une aile à bord d'attaque subsonique on peut utiliser pratiquement des profils à bords d'attaque arrondis.

On notera qu'en régime supersonique il n'en est pas ainsi. Si on reprend le problème posé pour une aile d'envergure infinie normale au vent, on trouve aisément que le profil optimum est formé de deux arcs de parabole symétriques.

N° 6 - REMARQUES SUR LES AILES EN FLECHE PORTANTES A BORDS D'ATTAQUE SONIQUE ET SUBSONIQUE

(Voir N° 4.1.2.3.2.)

La formule (IV.69) peut s'écrire encore en posant :

$$\frac{\eta_0 [x - \xi - 2(\eta_0 + y^x)]}{\eta_0 x + y^x \xi} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \frac{2(\eta_0 + y^x)}{x} = \frac{1}{1+t_0^2},$$

sous la forme :

$$C_p = - \frac{4i}{\pi \beta \sqrt{x(x-2y^x)}} \left\{ x - y^x - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{x}{2(\eta_0 + y^x)}} \int_0^{t_0} \frac{x - y^x - (\eta_0 + y^x)(1+t^2)}{1+t^2} \frac{dt}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} \right\}.$$

On pourrait faire le calcul du C_z de la plaque étudiée au n° 4.1.2.3.2. d'une façon différente, en effectuant au préalable l'intégrale précédente, et en intégrant les pressions le long de la plaque. On trouve ainsi que dans la région AA'A" de la figure 88 le C_p a la valeur simple :

$$C_p = - \frac{2i}{\pi \beta} \sqrt{\frac{2(\eta_0 + y^x)}{x - 2y^x}}.$$

Le long de AA" il y a donc une discontinuité de la pression égale à :

$$\Delta C_p = \frac{2i}{\pi \beta} \frac{x - 2y^x}{\sqrt{x(x - 2y^x)}}.$$

Cette discontinuité peut d'ailleurs se calculer immédiatement à partir de la formule donnant le C_p en faisant tendre t_0 vers zéro car il est clair que l'intégrale tend vers une valeur finie lorsque t_0 tend vers zéro.

Si le bord d'attaque est subsonique, la même théorie s'applique. Dans ce cas, le C_p ne peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires ⁽¹⁾. Mais on peut calculer directement la discontinuité de pression le long de la ligne de Mach issue de A. On rapprochera ce phénomène important de l'étude générale faite à la fin de l'Annexe n° 1, qui prévoit l'existence de telles discontinuités sur les cônes de Mach ayant pour sommets les extrémités des bords d'attaques subsoniques.

N° 7 - CALCUL DES CORPS FUSELES INFINIMENT PEU OUVERTS

A la fin du n° 4.2.4. nous laissons prévoir que par composition de mouvements coniques, on pouvait donner une étude complète des corps fuselés infiniment peu ouverts quelconques. Dans une communication au VIIème Congrès International de Mécanique appliquée (Septembre 1948), M. WARD exposait une élégante méthode reposant sur une résolution de l'équation des ondes à l'aide du calcul symbolique; ce travail est actuellement publié (réf.9). Nous allons montrer ici l'exactitude de nos prévisions, en établissant par la méthode de composition des mouvements coniques les formules fondamentales données par M. WARD.

Les notations qui ne sont pas définies ici sont les mêmes que celles du chapitre 2. Dans ce chapitre, nous avons montré que, *aux environs de l'obstacle*, la vitesse complexe $U(Z)$ était de la forme :

$$U(Z) = A_0 \log Z + \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{Z^n},$$

les A_n étant des coefficients numériques dépendant de la forme du cône.

Posons :

$$z = re^{i\theta};$$

comme aux environs de l'obstacle :

$$\rho \approx \frac{\beta r}{2x_1}, \quad z \approx \frac{\beta z}{2x_1},$$

et :

$$U(z) = A_0 \left(\log z + \log \frac{\beta}{2x_1} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{A'_n x_1^n}{z^n},$$

les A'_n étant de nouveaux coefficients.

On en déduit que le potentiel de perturbation est de la forme :

$$\varphi = \mathcal{R}_0 [K_0(z)],$$

avec :

(1) Voir une étude de cette question avec applications numériques dans un article de "La Recherche Aéronautique" à paraître prochainement.

$$K_o(z) = A_o \left[x_1 \log z + \int_0^{x_1} \log \frac{\beta}{2t} dt \right] + \sum_1^{\infty} \frac{A_n'' x_1^{n+1}}{z^n},$$

les A_n'' désignant de nouveaux coefficients numériques.

Plus généralement, le potentiel du mouvement conique infiniment peu ouvert dont le sommet est situé en $x_1 = \sigma$, $r = 0$, a pour expression (aux environs de l'obstacle) :

$$\varphi = \mathcal{R}_o \left[K_{\sigma}(z) \right],$$

avec :

$$K_{\sigma}(z) = A_o(\sigma) \left[(x_1 - \sigma) \log z + \int_0^{x_1 - \sigma} \log \frac{\beta}{2t} dt \right] + \sum_1^{\infty} \frac{A_n''(\sigma) (x_1 - \sigma)^{n+1}}{z^n}.$$

Une superposition de mouvements coniques dont les sommets sont situés sur Ox_1 donne lieu à un écoulement, qui aux environs de l'obstacle dépend du potentiel :

$$(1) \quad \varphi = \mathcal{R}_o \left[f(z) \right],$$

où $f(z)$ est de la forme :

$$(2) \quad f(z) = a_o \log z + b_o + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

les coefficients a_o , b_o , a_n , étant définis par les intégrales :

$$a_o = \int_0^{x_1} (x_1 - \sigma) dA_o(\sigma), \quad b_o = \int_0^{x_1} dA_o(\sigma) \int_0^{x_1 - \sigma} \log \frac{\beta}{2t} dt.$$

$$a_n = \int_0^{x_1} (x_1 - \sigma)^{n+1} dA_n''(\sigma).$$

On remarquera immédiatement que :

$$b_o = a_o \log \frac{\beta}{2} - \int_0^{x_1} dA_o(\sigma) \int_0^{x_1 - \sigma} \log t dt = a_o \log \frac{\beta}{2} - \int_0^{x_1} \log(x_1 - \sigma) d\sigma \int_0^{\sigma} dA_o(t),$$

ou :

$$(3) \quad b_o = a_o \log \frac{\beta}{2} - \int_0^{x_1} \frac{da_o}{d\sigma} \log(x_1 - \sigma) d\sigma.$$

Réciproquement, il est clair que, dans des conditions très larges, une fonction $f(z)$ telle que (2), dans laquelle les coefficients a_o , b_o , a_n sont des fonctions de x_1 , a_o et b_o étant liés par (3), détermine par (1) le potentiel d'un écoulement infiniment peu ouvert, au voisinage de l'axe Ox_1 . Ceci constitue le résultat fondamental de M. WARD.

Nous sommes ainsi en mesure de construire de tels écoulements. La seule question théorique à examiner est la suivante : *Peut-on déterminer les coefficients $a_n(x_1)$ pour que φ représente le potentiel d'un écoulement autour d'un obstacle donné.* Nous allons voir que la réponse est affirmative en envisageant les conditions aux limites.

Désignons par :

$$r = F(\theta, x_1) ,$$

l'équation définissant l'obstacle; par C_{x_1} la section d'abscisse x_1 , par φ_{x_1} la fonction des deux variables r et θ obtenue en considérant x_1 dans φ comme paramètre.

La dérivée normale de φ_{x_1} le long de C_{x_1} est donnée par :

$$\frac{d\varphi_{x_1}}{dn} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}{\sqrt{F^2 + (\partial F / \partial \theta)^2}} .$$

Or les conditions aux limites de long de C_{x_1} s'écrivent, compte tenu des approximations usuelles :

$$F \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = F \frac{\partial F}{\partial x_1} ;$$

d'où la relation :

$$\frac{d\varphi_{x_1}}{dn} = \frac{F \frac{\partial F}{\partial x_1}}{\sqrt{F^2 + (\partial F / \partial \theta)^2}} .$$

On a donc en désignant respectivement par s et ψ_{x_1} l'arc de C_{x_1} et la fonction conjuguée de φ_{x_1} :

$$\frac{d\psi_{x_1}}{ds} = F \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{d\theta}{ds} .$$

Le coefficient a_0 est donné par :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{x_1}} \frac{d\psi_{x_1}}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{\partial F}{\partial x_1} d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{dx_1} ,$$

$S(x_1)$ désigne l'aire délimitée par C_{x_1} ; les coefficients a_n s'obtiennent alors en résolvant un problème de Dirichlet extérieur pour le contour C_{x_1} . Nous pouvons donc ainsi déterminer entièrement l'écoulement autour d'un obstacle quelconque infiniment peu ouvert.

M. WARD (réf.9) a donné dans son mémoire de belles applications de ces résultats. En particulier en prenant pour exprimer la pression la formule (I.11) il a montré que la portance globale s'exprime uniquement en fonction du coefficient a_1 de la section terminale de l'obstacle et que la traînée ne dépendait que des coefficients a_n de cette section.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - KRASSILCHTCHIKOVA - *C.R. Acad. Sc. U.R.S.S. - Vol.LVI, p.571; vol.LVIII, p.543, p.761, p.989.*
 - 2 - J.C. EVVARD - *Distribution of Wave Drag and Lift in the Vicinity of Wing Tips at Supersonic Speeds - N.A.C.A. Tech. Note 1382 (1947).*
 - 3 - W.D. HAYES - *Linearized Supersonic Flow - North American Aviation Inc. Report. N° AL 222 (1947).*
 - 4 - G.N. WARD - *Supersonic Flow past thin Wings - Quart. Journ. of Mech. and Appl. Mathem. (1949).*
 - 5 - P. GERMAIN et R. BADER - *Théorie générale de l'écoulement supersonique autour d'un obstacle aplati sur un plan - O.N.E.R.A. Rap. 1/1155 A (1948).*
 - 6 - H. PORITZKY - *Linearized Compressible Flow - Quart. of Appl. Math. (1949).*
 - 7 - P. GERMAIN - *La théorie des mouvements homogènes et ses applications au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique. "La Recherche Aéronautique" (1949).*
 - 8 - G.N. WARD - *The Pressure Distribution on some Flat Laminar Aerofoils at Incidence at Supersonic Speeds - R et M. N° 2 206 (1946).*
 - 9 - G.N. WARD - *Supersonic Flow past Slender Pointed bodies - Quarterly Journ. of Mech. and Applied Math. (1949).*
-



TABLE des MATIERES

	<i>Pages</i>
CHAPITRE I. GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS CONIQUES	I
1.1. Equations des Mouvements supersoniques linéarisés.	1
1.2. Généralités sur les écoulements coniques	7
1.3. Les mouvements homogènes	16
CHAPITRE II. LES ECOULEMENTS CONIQUES INFINIMENT PEU OUVERTS	22
2.1. Solution du problème	22
2.2. Applications :	30
- cône de révolution.	31
- cône elliptique.	33
- étude d'un cône à section semi-circulaire	40
2.3. Calcul numérique des écoulements coniques infiniment peu ouverts	43
- calcul des opérateurs trigonométriques	48
CHAPITRE III. LES ECOULEMENTS CONIQUES INFINIMENT APLATIS SUR UN PLAN	57
3.1. Cône obstacle entièrement intérieur au cône de Mach	58
- étude des problèmes élémentaires écoulements coniques symétriques par rapport à Ox_1x_3	58
écoulements coniques non symétriques	70
- problème général	75
méthode rhéoelectrique	77
méthode purement numérique	84
3.2. Cas où le cône n'est pas intérieur au cône de Mach	94
- cône débordant totalement le cône de Mach	95
- cône partiellement intérieur et partiellement extérieur au cône de Mach	101
- cône entièrement extérieur au cône de Mach	107
3.3. Remarques complémentaires sur les écoulements coniques infiniment aplatis	111

CHAPITRE IV. LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS CONIQUES ET SES APPLICATIONS AU CALCUL AERODYNAMIQUE DES APPAREILS SUPERSONIQUES	118
4.1. Le calcul des ailes	118
- problèmes symétriques	120
ailes rectangulaires	120
aile en flèche	130
- problèmes portants	143
aile rectangulaire	148
effet d'ailerons et de volets	156
aile en flèche	158
les segments portants	164
4.2. Etude des fuselages	167
4.3. Ecoulements coniques aplatis sur un dièdre : dérives et gouvernes	172
BIBLIOGRAPHIE	178
ANNEXE	181

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LE PROBLÈME DE PLATEAU

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 5 Juin 1948

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. CABANNES

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
J. SARRAILH

Imp. Servant-Crouzet
II, Av. de Vaugirard-Nouveau
Paris 15ème